

Ćwiczenia 12

Całka niewłaściwa

Całki niewłaściwe I rodzaju • całki niewłaściwe II rodzaju • zbieżność i rozbieżność • pole obszaru nieograniczonego • zastosowanie w ekoenergetyce. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 12.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

I rodzaj: $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx$; $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx$ (obie muszą być zbieżne);
 II rodzaj (b – punkt osobiwy): $\int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow b^-} \int_a^T f(x) dx$; $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ zbieżna $\Leftrightarrow p > 1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ zbieżna $\Leftrightarrow p < 1$.
 Przydatne granice: $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-T} = 0$, $\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \arctg T = \pm \frac{\pi}{2}$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \ln T = \infty$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność całek; jeśli są zbieżne, oblicz ich wartość:

- a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ c) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$ d) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$
 e) $\int_0^\infty \frac{dx}{3x+1}$ f) $\int_1^\infty x^2 dx$ g) $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x} dx$

Zadanie 2. Oblicz całki niewłaściwe I rodzaju:

- a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$ b) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$ c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$, $a > 0$
 d) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ e) ★ $\int_0^\infty x e^{-x} dx$ f) ★ $\int_{-\infty}^\infty \frac{(\arctg x)^2}{1+x^2} dx$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych II rodzaju (wskaz punkt osobiwy):

- a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$
 d) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ e) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ f) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
 g) ★ $\int_0^1 \ln x dx$

Zadanie 4. Oblicz pole obszaru (nieograniczonego) leżącego między wykresem funkcji a osią Ox :

- a) $y = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$ b) $y = e^{-x}$, $x \geq 0$ c) $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Zadanie 5. (ekoenergetyka) Po wyłączeniu zasilania magazyn ciepła oddaje moc $P(t) = 4e^{-0,2t}$ [kW], gdzie t – czas w godzinach. Oblicz całkowitą energię, jaką odda magazyn ($t \in [0, \infty)$), oraz energię oddaną w ciągu pierwszych 5 godzin. Jaki to procent całości?

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Zbadaj zbieżność całek; jeśli są zbieżne, oblicz ich wartość:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$

b) $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

e) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

g) ★ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Zadanie S2. Zbadaj zbieżność całek:

a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e) ★ $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Zadanie S3. Korzystając z definicji, wykaż, że całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna dla $p \leq 1$.

📌 Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Zadanie T2. Oblicz $\int_0^{\infty} e^{-x/2} dx$.

Zadanie T3. Oblicz $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Zadanie T4. Zbadaj zbieżność całki $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\frac{1}{2}$; b) rozbieżna ($2\sqrt{T} \rightarrow \infty$); c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) rozbieżna ($\frac{1}{3} \ln(3T+1) \rightarrow \infty$); f) rozbieżna; g) rozbieżna ($\frac{1}{2} \ln^2 T \rightarrow \infty$).

Zad. 2. a) $\frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2}, \frac{\pi}{4}$; b) $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1, \arctg(x+1), \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}, \frac{\pi}{a}$; d) $t = x^2, \frac{1}{2}$; e) przez części: $-(x+1)e^{-x}, 1$ (granica $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T+1}{e^T} = 0$ z reguły de L'Hospitala); f) $t = \arctg x, \left[\frac{1}{3} \arctg^3 x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot 2 = \frac{\pi^3}{12}$.

Zad. 3. a) 0 – osobliwy, 2; b) 0, $\frac{3}{2}$; c) 0, rozbieżna; d) 1, rozbieżna; e) 5, $[-2\sqrt{5-x}], 2\sqrt{3}$; f) 1 ($\ln 1 = 0$), $t = \ln x, [2\sqrt{\ln x}], 2$; g) 0, $[x \ln x - x]_T^1, \lim_{T \rightarrow 0^+} T \ln T = 0$ (de L'Hospital), -1.

Zad. 4. a) 1; b) 1; c) π .

Zad. 5. $E = \int_0^{\infty} 4e^{-0,2t} dt = 20 \text{ kWh}; E_5 = 20(1 - e^{-1}) \approx 12,64 \text{ kWh}$, czyli ok. 63%.

Zad. S1. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) rozbieżna; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $t = \ln x, 1$; f) 0 (obie części zbieżne: $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$); g) $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2} \right) \approx 0,554$.

Zad. S2. a) 4; b) rozbieżna; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $[-\sqrt{1-x^2}], 1$; e) punkt osobliwy 0 **wewnątrz** przedziału; $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ jest rozbieżna, więc cała całka jest rozbieżna (wynik -2 z wzoru N-L jest błędny).

Zad. S3. Dla $p \neq 1$: $\int_1^T \frac{dx}{x^p} = \frac{T^{1-p}-1}{1-p}$, granica $\frac{1}{p-1}$ dla $p > 1$ i ∞ dla $p < 1$; dla $p = 1$: $\ln T \rightarrow \infty$.

Sprawdź. T1: 1; T2: 2; T3: 6; T4: rozbieżna ($\ln(T+1) - \ln 2 \rightarrow \infty$).