

Ćwiczenia 13

Zastosowania algebry liniowej w ochronie środowiska

Wartości i wektory własne macierzy 2×2 • ślad i wyznacznik • model Leslie: tempo wzrostu i stabilna struktura wieku • macierz przejścia, stan równowagi. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 13.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$, $\lambda_1\lambda_2 = \det A$; $\mathbf{v}$ – z jednego równania układu $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Leslie $\mathbf{x}_{t+1} = L\mathbf{x}_t$, $L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ s & 0 \end{bmatrix}$: λ_1 – tempo wzrostu, $\mathbf{v}_1$ – stabilna struktura wieku. Macierz przejścia: $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$ – stan równowagi.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Sprawdź, które z wektorów $\mathbf{a} = [2, 1]$, $\mathbf{b} = [1, 1]$, $\mathbf{c} = [-1, 2]$ są wektorami własnymi macierzy $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Podaj odpowiadające im wartości własne.

Zadanie 2. Wyznacz wartości własne i wektory własne macierzy. Sprawdź wynik za pomocą śladu i wyznacznika.

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. Nie rozwiązując równania charakterystycznego, sprawdź, czy liczby 2 i 5 mogą być wartościami własnymi macierzy $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Wyznacz odpowiadające im wektory własne.

Zadanie 4. (populacja) Populację samic pewnego gatunku płazów podzielono na młode i dorosłe. Macierz Leslie ma postać $L = \begin{bmatrix} 0,6 & 1,2 \\ 0,6 & 0 \end{bmatrix}$.

- a) Objaśnij znaczenie elementów macierzy L .
 b) Dla $\mathbf{x}_0 = [100, 100]^T$ oblicz $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$.
 c) Wyznacz dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny. Jakie jest roczne tempo wzrostu populacji i jaka jest stabilna struktura wieku?
 d) Oblicz $L [200, 100]^T$ i skomentuj wynik.

Zadanie 5. (ochrona gatunku) ★ Dla populacji, w której młode się nie rozmnażają, $L = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ s & 0 \end{bmatrix}$. Wyznacz wartości własne w zależności od s . Dla $s = 0,3$ oceń, czy populacja przetrwa. Jaka minimalna przeżywalność młodych zapewnia stabilność populacji?

Zadanie 6. (krajobraz) W ciągu dekady 20% łąk zarasta krzewami, a 30% zarośli zostaje wykoszonych i staje się łąkami. Zapisz macierz przejścia P (stan: [łąki, zarośla]). Jeśli obecnie cały teren to łąki, jaki będzie podział za 10 i za 20 lat? Wyznacz stan równowagi.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy: a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Zadanie S2. (populacja) Dla macierzy Leslie $L = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0,3 & 0 \end{bmatrix}$ wyznacz dominującą wartość własną. Czy populacja rośnie, czy maleje?

Zadanie S3. (krajobraz) Macierz przejścia między lasem a terenem otwartym w ciągu dekady wynosi $P = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix}$. Wyznacz stan równowagi.

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie T2. Dla macierzy Leslie $L = \begin{bmatrix} 0,6 & 1,1 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$ wyznacz tempo wzrostu populacji i stabilną strukturę wieku.

Zadanie T3. Wyznacz stan równowagi dla macierzy przejścia $P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. $A\mathbf{a} = [12, 6] = 6\mathbf{a}$ – tak, $\lambda = 6$; $A\mathbf{b} = [7, 4]$ – nie; $A\mathbf{c} = [-1, 2] = 1 \cdot \mathbf{c}$ – tak, $\lambda = 1$.

Zad. 2. a) $\lambda^2 - 3\lambda = 0$: $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 1]$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{v}_2 = [-2, 1]$; b) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$: $\lambda_1 = 3$, $[1, 1]$; $\lambda_2 = 2$, $[4, 5]$; c) $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$: $\lambda_1 = 6$, $[2, 1]$; $\lambda_2 = 1$, $[-1, 2]$; d) macierz trójkątna: $\lambda_1 = 2$, $[1, 1]$; $\lambda_2 = -1$, $[0, 1]$. We wszystkich przypadkach $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$, $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$.

Zad. 3. $\text{tr} = 7 = 2 + 5$, $\det = 10 = 2 \cdot 5$ – tak; $\lambda = 2$: $[1, -1]$; $\lambda = 5$: $[1, 2]$.

Zad. 4. a) $f_1 = 0,6$, $f_2 = 1,2$ – płodność młodych i dorosłych, $s = 0,6$ – przeżywalność młodych; b) $\mathbf{x}_1 = [180, 60]^T$, $\mathbf{x}_2 = [180, 108]^T$; c) $\lambda^2 - 0,6\lambda - 0,72 = 0$, $\Delta = 3,24$, $\lambda_1 = 1,2$, $\lambda_2 = -0,6$; $\mathbf{v}_1 = [2, 1]$ – wzrost o 20% rocznie, $\frac{2}{3}$ młodych i $\frac{1}{3}$ dorosłych; d) $[240, 120]^T = 1,2 \cdot [200, 100]^T$ – populacja o stabilnej strukturze rośnie dokładnie 1,2 raza na rok.

Zad. 5. $\lambda^2 - 2s = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{2s}$; dla $s = 0,3$: $\lambda_1 = \sqrt{0,6} \approx 0,77 < 1$ – populacja wymiera; $\lambda_1 = 1 \iff s = 0,5$.

Zad. 6. $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$; po 10 latach $[0,8; 0,2]$, po 20 latach $[0,7; 0,3]$; równowaga: $-0,2a + 0,3b = 0$, $a = 1,5b$: 60% łąk, 40% zarośli.

Zad. S1. a) 3: $[1, 1]$; 1: $[1, -1]$; b) 5: $[1, 1]$; -1: $[-2, 1]$; c) 3: $[1, 0]$; 0,5: $[0, 1]$.

Zad. S2. $\lambda^2 = 0,9$, $\lambda_1 \approx 0,95 < 1$ – populacja maleje (ok. 5% rocznie).

Zad. S3. $-0,05I + 0,1O = 0$, $I = 2O$: $\frac{2}{3}$ lasu, $\frac{1}{3}$ terenu otwartego.

Sprawdź. T1: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$: 4, $[1, 1]$; 1, $[1, -2]$; T2: $\lambda^2 - 0,6\lambda - 0,55 = 0$, $\Delta = 2,56$, $\lambda_1 = 1,1$ (wzrost o 10% rocznie), $\mathbf{v}_1 = [11, 5]$ (ok. 69% młodych); T3: $a = 3b$: $[0,75; 0,25]$.