

Ćwiczenia 13

Równania różniczkowe zwyczajne

Sprawdzanie rozwiązań • równania o zmiennych rozdzielonych • zagadnienie początkowe • równania liniowe rzędu pierwszego (uzmiennianie stałej) • zastosowania. Czas: 2 h.

Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 13.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Zmienne rozdzielone: $y' = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$; warunek $y(x_0) = y_0$ wyznacza stałą.
 Liniowe: $y' + p(x)y = q(x)$: RJ $\Rightarrow y = Ce^{-P(x)}$, $P = \int p dx$; uzmiennianie: $y = C(x)e^{-P(x)}$,
 $C'(x)e^{-P(x)} = q(x)$.
 Przydatne: $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx$; $\ln|y| = h(x) + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{h(x)}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania ($C \in \mathbb{R}$):

a) $y = Ce^{3x}$, $y' = 3y$

b) $y = x^2 + \frac{C}{x}$, $xy' + y = 3x^2$

c) $y = \sin x + C \cos x$, $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

Zadanie 2. Wyznacz całki ogólne równań o zmiennych rozdzielonych:

a) $y' = 2xy$

b) $xy' = 2y$

c) $y' = \frac{x}{y}$

d) $y' = e^{x-y}$

e) $y' = y^2 \cos x$

f) ★ $(1+x^2)y' = 1+y^2$

Zadanie 3. Rozwiąż zagadnienia początkowe:

a) $y' = -2xy$, $y(0) = 3$

b) $y' = \frac{y}{x}$, $y(2) = 6$

c) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$

d) $yy' = x$, $y(0) = 2$

Zadanie 4. Rozwiąż równania liniowe metodą uzmienniania stałej:

a) $y' + 2y = 4$

b) $y' + y = e^{-x}$

c) $y' + 2xy = 2x$

d) $y' + \frac{y}{x} = x^2$

e) $y' - \frac{3}{x}y = x$, $y(1) = 0$

f) ★ $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

Zadanie 5. (ekoenergetyka) Woda w zasobniku solarnym ma temperaturę 80°C , a temperatura otoczenia wynosi 20°C . Zgodnie z prawem Newtona $T'(t) = -k(T(t) - 20)$. Po 2 godzinach woda ma 60°C .

- a) Wyznacz $T(t)$ i stałą k . b) Oblicz temperaturę po 6 h. c) Po jakim czasie woda ostygnie do 30°C ?

Zadanie 6. (ekoenergetyka) Moc zainstalowana instalacji PV w pewnym regionie rośnie w tempie proporcjonalnym do aktualnej mocy: $P'(t) = 0,2 P(t)$ (t w latach). Wyznacz $P(t)$, jeśli $P(0) = P_0$. Po ilu latach moc się podwoi?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Rozwiąż równania (o zmiennych rozdzielonych):

- a) $y' = 3x^2 y$ b) $y' = \frac{1+y}{x}$ c) $y' = y^2, y(1) = 1$

Zadanie S2. Rozwiąż równania liniowe:

- a) $y' - y = e^x$ b) $y' + \frac{y}{x} = 1$
c) $y' - \frac{2y}{x} = x^3$ d) $y' + y = x, y(0) = 0$

Zadanie S3. Ładunek kondensatora ładowanego w obwodzie RC wynosi $q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$. Sprawdź, że funkcja ta spełnia równanie $Rq' + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$ i warunek $q(0) = 0$. Po jakim czasie (w jednostkach $\tau = RC$) kondensator naładuje się w 90%?

Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Wyznacz całkę ogólną równania $y' = 4x^3 y$.

Zadanie T2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $yy' = 2x, y(0) = 1$.

Zadanie T3. Rozwiąż równanie $y' + 3y = 6$.

Zadanie T4. Rozwiąż równanie $y' - \frac{y}{x} = x$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) tak; b) $y' = 2x - \frac{C}{x^2}$, $xy' + y = 2x^2 - \frac{C}{x} + x^2 + \frac{C}{x} = 3x^2$ – tak; c) $y' = \cos x - C \sin x$, $y' + y \operatorname{tg} x = \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$ – tak.

Zad. 2. a) $y = Ce^{x^2}$; b) $y = Cx^2$; c) $y^2 = x^2 + C$; d) $e^y = e^x + C$, $y = \ln(e^x + C)$; e) $-\frac{1}{y} = \sin x + C$, $y = -\frac{1}{\sin x + C}$ oraz $y \equiv 0$; f) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$, $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + C)$.

Zad. 3. a) $y = 3e^{-x^2}$; b) $y = 3x$; c) $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - 1$, $y = \frac{2}{2-x^2}$; d) $y^2 = x^2 + 4$, $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

Zad. 4. a) $y = 2 + Ce^{-2x}$; b) $y = (x + C)e^{-x}$; c) $y = 1 + Ce^{-x^2}$; d) RJ: $y = \frac{C}{x}$, $C'(x) = x^3$, $y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$; e) $y = C_1 x^3 - x^2$, $C_1 = 1$, $y = x^3 - x^2$; f) RJ: $y = \frac{C}{\cos x}$, $C'(x) = 1$, $y = \frac{x+C}{\cos x}$.

Zad. 5. a) $T(t) = 20 + 60e^{-kt}$, $e^{-2k} = \frac{2}{3}$, $k = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 0,203 \text{ h}^{-1}$; b) $T(6) = 20 + 60 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 37,8^\circ\text{C}$; c) $e^{-kt} = \frac{1}{6}$, $t = \frac{\ln 6}{k} \approx 8,8 \text{ h}$.

Zad. 6. $P(t) = P_0 e^{0,2t}$; $e^{0,2t} = 2$, $t = 5 \ln 2 \approx 3,5$ roku.

Zad. S1. a) $y = Ce^{x^3}$; b) $\ln|1+y| = \ln|x| + \ln|C|$, $y = Cx - 1$; c) $-\frac{1}{y} = x - 2$, $y = \frac{1}{2-x}$.

Zad. S2. a) $y = (x + C)e^x$; b) $y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$; c) $y = Cx^2 + \frac{x^4}{2}$; d) $y = x - 1 + Ce^{-x}$, $C = 1$, $y = x - 1 + e^{-x}$.

Zad. S3. $q' = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$, $Rq' + \frac{q}{C} = \mathcal{E} e^{-t/RC} + \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-t/RC} = \mathcal{E}$; $q(0) = 0$; $1 - e^{-t/\tau} = 0,9$, $t = \tau \ln 10 \approx 2,3 \tau$.

Sprawdź. T1: $y = Ce^{x^4}$; T2: $\frac{y^2}{2} = x^2 + C$, $y = \sqrt{2x^2 + 1}$; T3: $y = 2 + Ce^{-3x}$; T4: RJ: $y = Cx$, $C'(x) = 1$, $y = x^2 + Cx$.