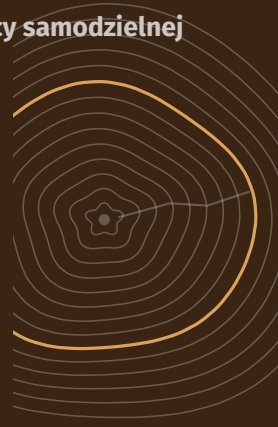


# Karta najważniejszych wzorów

Wszystkie najważniejsze wzory z wykładów 1-10 na dwóch stronach.  
Definicje, przykłady i objaśnienia – w streszczeniach poszczególnych bloków.

**Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka**

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



## Dziedzina funkcji

$\sqrt{g(x)}$  (stopień parzysty):  $g(x) \geq 0$ ;  $\frac{h(x)}{g(x)}$ :  $g(x) \neq 0$ ;  
 $\log_a g(x)$ :  $g(x) > 0$ .

## Funkcja kwadratowa

$y = ax^2 + bx + c$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;  
wierzchołek  $W(p, q)$ :  $p = \frac{-b}{2a}$ ,  $q = \frac{-\Delta}{4a}$ .

## Potęgi i logarytmy

$x^a x^b = x^{a+b}$ ,  $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ,  $(x^a)^b = x^{ab}$ ,  $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ,  
 $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ ;  
 $\log_a x = y \iff a^y = x$ ;  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ,  
 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ,  $\log_a x^m = m \log_a x$ ;  
 $\ln x = \log_e x$ ,  $\ln e^k = k$ ,  $e^{\ln x} = x$ .

## Granice

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$  ( $p > 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ;  
 $[\frac{a}{0^\pm}] = \pm \infty$  ( $a > 0$ );  $[\frac{0}{0}]$  – rozkład i skracanie;  $[\frac{\infty}{\infty}]$  –  
dzielenie przez najwyższą potęgę.  
**de L'Hospital:**  $[\frac{0}{0}]$ ,  $[\frac{\infty}{\infty}]$ :  $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$ .

## Asymptoty

pionowa  $x = x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm \infty$ ; pozioma  $y = b$ :  
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$ ;  
ukośna  $y = ax + b$ :  $a = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - ax)$ .

## Pochodne funkcji elementarnych

$(c)' = 0$                        $(x^n)' = nx^{n-1}$   
 $(e^x)' = e^x$                      $(a^x)' = a^x \ln a$   
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$                      $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 $(\sin x)' = \cos x$                $(\cos x)' = -\sin x$

## Reguły różniczkowania

$(cf)' = cf'$ ,  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(fg)' = f'g + fg'$ ,  
 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ;  
 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ , np.  $(e^{kx})' = ke^{kx}$ .  
**Styczna:**  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

## Monotoniczność, ekstrema, wypukłość

$f' > 0$  – rośnie,  $f' < 0$  – maleje; ekstremum:  $f'(x_0) = 0$   
i zmiana znaku  $f'$  ( $+\rightarrow -$  max,  $-\rightarrow +$  min);  
 $f'' > 0$  – wypukła,  $f'' < 0$  – wklęsła; punkt przegięcia:  
zmiana znaku  $f''$ .  
**Belka z kłody:**  $W = \frac{bh^2}{6}$ , max dla  $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ,  $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

## Całki nieoznaczone

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  ( $n \neq -1$ )     $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$   
 $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$                $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$   
 $\int \sin x dx = -\cos x + C$                $\int \cos x dx = \sin x + C$   
**Podstawianie:**  $t = g(x)$ ,  $dt = g'(x) dx$ ;  
 $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$ .  
**Przez części:**  $\int f g' dx = f g - \int f' g dx$ .

## Całka oznaczona

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ; pole między krzywymi:  
 $\int_a^b (g - f) dx$  ( $g \geq f$ );  
wartość średnia:  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f dx$ ; bryła obrotowa:  
 $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ ;  
kłoda (paraboloida):  $V = L \cdot \frac{S_1 + S_2}{2}$  (wzór Smaliana).

## Wektory

$\vec{AB} = [b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n]$ ;  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ ;  
 $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha$ ;  
 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$ .

**Macierze**

$A \pm B, cA$  – element po elemencie (ten sam wymiar);  
 $A^T$  – wiersze  $\leftrightarrow$  kolumny;  
 $AB: c_{ij} = (i\text{-ty wiersz } A) \circ (j\text{-ta kolumna } B)$ ,  
 $(m \times n)(n \times p) = m \times p$ ;  
 na ogół  $AB \neq BA$ ;  $AI = IA = A$ ;  $(AB)^T = B^T A^T$ .

**Wyznaczniki**

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ; stopień 3 – reguła Sarrusa;  
 Laplace:  $\det A = \sum_j a_{ij} D_{ij}$ ,  $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ;  
 zamiana wierszy – zmiana znaku;  $W_i \rightarrow W_i + cW_j$  – bez zmian; macierz trójkątna – iloczyn przekątnej.

**Macierz odwrotna**

istnieje  $\iff \det A \neq 0$ ;  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ;  
 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T$ ;  $AX = B \implies X = A^{-1}B$ ,  
 $XA = B \implies X = BA^{-1}$ .

**Układy równań liniowych**

**Kronecker–Capelli:** rozwiązanie  $\iff \text{rz } A = \text{rz}[A \mid B]$ ;  
 $= n$  – jedno,  $= r < n$  – nieskończenie wiele ( $n - r$  parametrów).

**Cramer** ( $W = \det A \neq 0$ ):  $x_j = \frac{W_j}{W}$  ( $W_j$ :  $j$ -ta kolumna zastąpiona kolumną wyrazów wolnych).

**Gauss:**  $[A \mid B] \rightarrow$  postać schodkowa  $\rightarrow$  podstawianie wstecz; wiersz  $[0 \dots 0 \mid d \neq 0]$  – układ sprzeczny.