MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zadania przykładowe

Powtórzenie • 16.01.2027

Zadania powtórkowe przed egzaminem

Zadania typu egzaminacyjnego z całego semestru: funkcje i granice, pochodna i optymalizacja, całki, wektory i macierze, wyznaczniki, macierz odwrotna, układy równań. Rozwiązuj samodzielnie, a potem porównaj z odpowiedziami. Materiał teoretyczny: streszczenia wykładów 1–10 i karta wzorów.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Analiza matematyczna

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x+1}$.

Zadanie 2. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3-x}{2x^3+7}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$

Zadanie 3. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+6}$.

Zadanie 4. Oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = (x^2+1)\,e^{-x}$ **b)** $f(x) = \ln(3x^2+1)$ **c)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Zadanie 5. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^{2x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 6. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

Zadanie 7. (optymalizacja) Z płyty wiórowej wykonujemy pojemnik bez wieka o kwadratowym dnie i pojemności $32\ \text{dm}^3$. Jakie powinny być wymiary pojemnika, aby zużyć najmniej płyty?

Zadanie 8. Oblicz całki:

a) $\displaystyle\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2} + 3e^x\right)dx$ **b)** $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

Zadanie 9. Oblicz pole obszaru ograniczonego parabolą $y = 4 - x^2$ i osią Ox.

Zadanie 10. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru pod wykresem $y = x^2$, $x \in \langle 0; 1\rangle$.

Algebra liniowa

Zadanie 11. Dla wektorów $\mathbf{a} = [1, 2, -2]$ i $\mathbf{b} = [2, 0, 1]$ oblicz $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$ oraz $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$. Czy wektory są prostopadłe?

Zadanie 12. Dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ oblicz AB i wyznacz macierz X z równania $2X + A = B$.

Zadanie 13. Oblicz wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ oraz macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 14. Rozwiąż układ równań metodą Gaussa lub Cramera: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - y + 3z = 7 \end{cases}$

Zadanie 15. (produkcja) Zakład produkuje stoły i krzesła. Na stół zużywa się $2\ \text{m}^2$ płyty i 3 h pracy, na krzesło – $0{,}5\ \text{m}^2$ płyty i 1 h pracy. W tygodniu dostępne jest $100\ \text{m}^2$ płyty i 180 h pracy. Ile stołów i krzeseł należy wyprodukować, aby wykorzystać całą płytę i cały czas pracy?

Odpowiedzi

Zad. 1. $6-2x \geq 0$ i $x \neq -1$: $D = (-\infty;-1) \cup (-1;3\rangle$.

Zad. 2. a) $\lim(x-3) = -6$; b) $\frac{5}{2}$; c) de L'Hospital: $\lim 3e^{3x} = 3$.

Zad. 3. pionowa $x = -3$, pozioma $y = 2$.

Zad. 4. a) $f' = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} = -(x-1)^2e^{-x}$; b) $\dfrac{6x}{3x^2+1}$; c) $\dfrac{(x^2+4)-2x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.

Zad. 5. $f(0) = 1$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$: $y = 2x+1$.

Zad. 6. $f' = 6(x+1)(x-2)$: rośnie na $(-\infty;-1)$ i $(2;\infty)$, maleje na $(-1;2)$; $\max f(-1) = 12$, $\min f(2) = -15$.

Zad. 7. a – bok dna, $h = \frac{32}{a^2}$; $S(a) = a^2 + \frac{128}{a}$, $S' = 2a - \frac{128}{a^2} = 0$, $a = 4$ dm, $h = 2$ dm, $S_{\min} = 48$ dm^2.

Zad. 8. a) $x^4 + \frac{2}{x} + 3e^x + C$; b) przez części: $x\sin x + \cos x + C$; c) $t = x^3+1$: $\ln|x^3+1| + C$.

Zad. 9. $\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \frac{32}{3}$.

Zad. 10. $V = \pi\int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}$.

Zad. 11. $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = [0,4,-5]$, $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = 2+0-2 = 0$ – tak, są prostopadłe.

Zad. 12. $AB = \begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & 0\end{bmatrix}$; $X = \frac{1}{2}(B-A) = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$.

Zad. 13. $\det = 15$ (np. rozwinięcie wzdłuż 1. wiersza: $2\cdot 7 + 1\cdot 1$); $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$.

Zad. 14. $W = -3$; $(x,y,z) = (2,1,2)$.

Zad. 15. $\begin{cases}2s + 0{,}5k = 100\\ 3s + k = 180\end{cases}$: $s = 20$ stołów, $k = 120$ krzeseł.