

Streszczenie wykładów 1–2

Funkcje elementarne. Granica funkcji

Blok I (17.10.2026) • funkcja, dziedzina, miejsca zerowe, monotoniczność, funkcja odwrotna • funkcje elementarne i modele w technologii drewna • granica funkcji, granice jednostronne, ciągłość • obliczanie granic • asymptoty

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Funkcja i jej własności

Definicja (funkcja jednej zmiennej)

Jeżeli każdej wartości x należącej do pewnego zbioru X przyporządkowujemy **dokładnie jedną** wartość y ze zbioru Y , to y nazywamy funkcją zmiennej x i zapisujemy $y = f(x)$. Zmienną x nazywamy argumentem.

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Definicja (dziedzina, zbiór wartości, wykres)

Zbiór D , na którym określona jest funkcja f , nazywamy **dziedziną**; zbiór wszystkich wartości $f(x)$ – **zbiorem wartości**. **Wykresem** funkcji nazywamy zbiór punktów $(x, f(x))$, $x \in D$. Każda prosta pionowa przecina wykres funkcji co najwyżej raz.

[GS, Funkcje]

★ Zapamiętaj

Wyznaczając dziedzinę, sprawdzamy: 1) wyrażenie pod pierwiastkiem stopnia parzystego: $g(x) \geq 0$; 2) mianownik: $g(x) \neq 0$; 3) wyrażenie pod logarytmem: $g(x) > 0$. W zastosowaniach dodatkowo ograniczamy dziedzinę do wartości mających sens (np. czas, masa, objętość ≥ 0).

Przykład 1

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$: $25 - x^2 \geq 0 \iff -5 \leq x \leq 5$, $D = \langle -5; 5 \rangle$.

b) $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x+1)}$: $(x-2)(x+1) \neq 0$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

c) $f(x) = \ln(3-x)$: $3-x > 0$, $D = (-\infty; 3)$.

Przykład 2 – rozcieńczanie impregnatu

Do 2 l koncentratu dolewamy V litrów wody; stężenie roztworu $c(V) = \frac{2}{2+V} \cdot 100\%$. Dziedzina matematyczna: $V \neq -2$, dziedzina praktyczna: $V \geq 0$. Dla $V = 8$ l: $c = 20\%$. Funkcja jest malejąca.

Definicja (miejsce zerowe, monotoniczność)

Miejszem zerowym funkcji nazywamy argument x , dla którego $f(x) = 0$. Funkcja jest **rosnąca**, gdy dla dowolnych $x_1 < x_2$ zachodzi $f(x_1) < f(x_2)$, a **malejąca**, gdy $f(x_1) > f(x_2)$.

 [GS, Funkcje]
Definicja (funkcja odwrotna)

Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa, to funkcję f^{-1} taką, że $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$, nazywamy **funkcją odwrotną** do f . Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$. Aby wyznaczyć f^{-1} , z równania $y = f(x)$ wyliczamy x .

 [F1, Funkcje jednej zmiennej]
Definicja (wilgotność drewna)

$$w = \frac{m - m_0}{m_0} \cdot 100\%,$$

gdzie m – masa drewna wilgotnego, m_0 – masa drewna w stanie absolutnie suchym.

 [FK, Drewno a woda]
Przykład 3 – masa i wilgotność

Belka ma w stanie absolutnie suchym masę $m_0 = 10$ kg. Masa jako funkcja wilgotności: $m(w) = 10(1 + \frac{w}{100})$ [kg] – funkcja liniowa rosnąca. Funkcja odwrotna: z $m = 10 + 0,1w$ otrzymujemy $w(m) = 10(m - 10) = \frac{m-10}{10} \cdot 100\%$. Dla $m = 12,5$ kg: $w = 25\%$.

2 Funkcje elementarne

Definicja (funkcja liniowa)

$y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Wykresem jest prosta; a – **współczynnik kierunkowy** (o ile zmienia się y , gdy x wzrośnie o 1), b – wyraz wolny (punkt przecięcia z osią Oy). Dla $a > 0$ funkcja rośnie, dla $a < 0$ maleje.

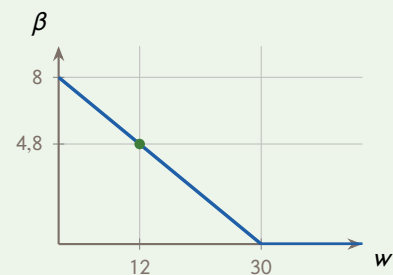
[GS, Funkcje elementarne]

Przykład 4 – skurcz drewna

Poniżej punktu nasycenia włókien (PNW, ok. 30%) drewno kurczy się w przybliżeniu liniowo wraz ze spadkiem wilgotności, powyżej PNW jego wymiary się nie zmieniają. [FK, Skurcz i pęcznienie] Przyjmując całkowity skurcz styczny 8% (wartość przykładowa):

$$\beta(w) = \begin{cases} \frac{8}{30}(30 - w), & 0 \leq w \leq 30, \\ 0, & w > 30. \end{cases}$$

Deska o szerokości 200 mm suszona do 12%: $\beta = \frac{8}{30} \cdot 18 = 4,8\%$, czyli zwęzi się o 9,6 mm.



Rys. 1. Skurcz styczny.

Funkcja kwadratowa

postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$

postać kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q$, $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$ – wierzchołek $W(p, q)$

miejsca zerowe: $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $\Delta = 0$: $x_0 = \frac{-b}{2a}$; $\Delta < 0$: brak

postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ (gdy $\Delta \geq 0$)

Dla $a > 0$ ramiona paraboli skierowane są w górę (minimum q w $x = p$), dla $a < 0$ – w dół (maksimum q).

[KW1, Funkcja kwadratowa]

Przykład 5 – zysk tartaku

Dzienny zysk [tys. zł] przy przetarciu x m³ drewna: $Z(x) = -0,5x^2 + 40x - 300$.

Rozwiązanie. $a = -0,5 < 0$ – maksimum w wierzchołku: $p = \frac{-40}{2 \cdot (-0,5)} = 40$,

$Z(40) = -800 + 1600 - 300 = \text{500}$ tys. zł.

$\Delta = 1600 - 600 = 1000$, $x_{1,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{1000}}{-1}$, $x_1 \approx 8,4$, $x_2 \approx 71,6$ – produkcja jest opłacalna ($Z > 0$) dla $x \in (8,4; 71,6)$.

Definicja (funkcja wymierna)

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów $y = \frac{W(x)}{V(x)}$, określony dla $V(x) \neq 0$.
 Najprostsza: $y = \frac{a}{x}$ (hiperbola).

[GS, Funkcje elementarne]

Przykład 6 – koszt jednostkowy suszenia

Koszty stałe suszarni: 2000 zł/dobę, koszt zmienny: 50 zł/m³. Koszt suszenia 1 m³ przy załadunku x m³: $K(x) = \frac{2000+50x}{x} = 50 + \frac{2000}{x}$. $K(20) = 150$ zł, $K(80) = 75$ zł; koszt maleje, ale nie spada poniżej 50 zł.

Funkcja potęgowa i działania na potęgach

$y = x^p$, $p \in \mathbb{R}$. Dla $x, y > 0$: $x^a x^b = x^{a+b}$, $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, $(x^a)^b = x^{ab}$, $(xy)^a = x^a y^a$, $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$,
 $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

[GS, Funkcje elementarne]

Przykład 7 – objętość kłody

Kłoda o długości $L = 4$ m traktowana jak walec: $V(d) = \frac{\pi d^2}{4} L = \pi d^2$ [m³] – funkcja potęgowa zmiennej d . Dla $d = 0,3$ m: $V \approx 0,28$ m³, dla $d = 0,6$ m: $V \approx 1,13$ m³. Dwa razy grubsza kłoda ma cztery razy większą objętość.

Definicja (funkcja wykładnicza)

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $a > 1$ funkcja jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ – malejąca; $a^x > 0$ dla każdego x . Najważniejsza podstawa to liczba $e \approx 2,718$; funkcja e^{-kx} ($k > 0$) jest malejąca.

[GS, Funkcje elementarne]

Definicja (funkcja logarytmiczna)

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, przy czym $\log_a x = y \iff a^y = x$. Logarytm jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. Oznaczenia: $\log x = \log_{10} x$, $\ln x = \log_e x$.

[GS, Funkcje elementarne]

Działania na logarytmach ($x, y > 0$)

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a x^m = m \log_a x$; $\log_a 1 = 0$,
 $\log_a a = 1$; $\ln e^k = k$, $e^{\ln x} = x$.

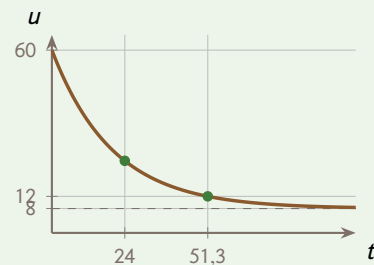
[GS, Funkcje elementarne]

Przykład 8 – krzywa suszenia

Wilgotność tarcicy w suszarni (model przybliżony): $u(t) = 8 + 52e^{-0,05t}$ [%], t w godzinach. $u(0) = 60\%$ to wilgotność początkowa, 8% – wilgotność równowagowa.

a) Po dobie: $u(24) = 8 + 52e^{-1,2} \approx 23,7\%$.

b) Kiedy $u = 12\%$? $52e^{-0,05t} = 4$, $e^{-0,05t} = \frac{1}{13}$; logarytmujemy: $-0,05t = -\ln 13$, $t = 20 \ln 13 \approx 51,3$ h.



Rys. 2. Krzywa suszenia.

Przykład 9 – hałas

Poziom natężenia dźwięku: $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ [dB], $I_0 = 10^{-12}$ W/m². [HRW2, Fale dźwiękowe] Gdy w hali pracują dwie jednakowe pilarki ($I \rightarrow 2I$): $L_2 = 10 \log \frac{2I}{I_0} = L + 10 \log 2 \approx L + 3$ dB. Dla $L = 95$ dB: $L_2 \approx 98$ dB.

3 Granica funkcji i ciągłość

Definicja (granica funkcji)

Liczbę g nazywamy **granicą** funkcji f w punkcie x_0 , jeżeli dla każdego ciągu argumentów $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \neq x_0$) ciąg wartości $f(x_n) \rightarrow g$; piszemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$. Intuicyjnie: wartości $f(x)$ są dowolnie bliskie g , gdy x jest dostatecznie bliskie x_0 . Analogicznie określamy granice dla $x \rightarrow \pm\infty$ oraz granice niewłaściwe ($\pm\infty$).

[KW1, Granica funkcji]

Definicja (granice jednostronne, ciągłość)

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ – granica lewostronna ($x < x_0$), $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ – prawostronna ($x > x_0$). Granica w x_0 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne istnieją i są równe.

Funkcja jest **ciągła** w punkcie x_0 , jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

[GS, Granica i ciągłość funkcji]

Ważne granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \ (p > 0); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\left[\frac{a}{0^+}\right] = +\infty, \quad \left[\frac{a}{0^-}\right] = -\infty \text{ dla } a > 0; \quad \left[\frac{a}{\infty}\right] = 0.$$

Symbole nieoznaczone: $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$ – wymagają przekształcenia wyrażenia.

[GS, Granica funkcji]

Jak obliczać granice

1. Podstawiamy x_0 – jeżeli wynik jest liczbą, jest to granica.
2. $\left[\frac{0}{0}\right]$ dla ilorazu wielomianów – rozkładamy licznik i mianownik na czynniki i skracamy przez $(x - x_0)$.
3. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ dla $x \rightarrow \pm\infty$ – dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x z mianownika.

[KW1, Granica funkcji]

Przykład 10

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ – granica w punkcie 2 nie istnieje;
- e) $\lim_{t \rightarrow \infty} (8 + 52e^{-0,05t}) = 8 + 52 \cdot 0 = 8$ – wilgotność dąży do wilgotności równowagowej.

Przykład 11 – ciągłość funkcji skurczu

Dla funkcji β z przykładu 4: $\lim_{w \rightarrow 30^-} \beta(w) = \frac{8}{30} \cdot 0 = 0$, $\lim_{w \rightarrow 30^+} \beta(w) = 0$, $\beta(30) = 0$ – funkcja jest ciągła w punkcie nasycenia włókien.

4 Asymptoty

Definicja (asymptoty)

pionowa $x = x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$; szukamy jej w punktach należących do dziedziny (zera mianownika, brzeg dziedziny logarytmu);

pozioma $y = b$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$;

ukośna $y = ax + b$: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$ (obie granice skończone, $a \neq 0$).

[KW1, Asymptoty]

Przykład 12

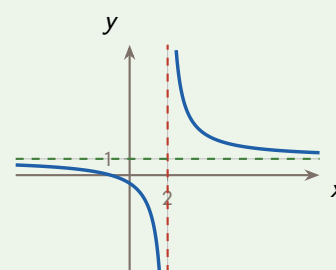
$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Pionowa: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty \Rightarrow$

$$x = 2.$$

Pozioma: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow y = 1.$

Ukośnej (innej niż pozioma) brak.



Rys. 3. Asymptoty $x = 2$ i $y = 1$.

Przykład 13

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ – asymptota ukośna
 $y = x$; asymptota pionowa $x = 0$.

Przykład 14 – asymptoty w zastosowaniach

Koszt jednostkowy $K(x) = 50 + \frac{2000}{x}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 50$ – asymptota pozioma $y = 50$ (koszt graniczny), $\lim_{x \rightarrow 0^+} K(x) = +\infty$ – asymptota pionowa $x = 0$. Krzywa suszenia $u(t) = 8 + 52e^{-0,05t}$ ma asymptotę poziomą $u = 8$ (wilgotność równowagowa). Asymptota pozioma opisuje **stan ustalony**.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [FK] F. Krzysik, *Nauka o drewnie*, PWN, Warszawa 1974.
- [HRW2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.