

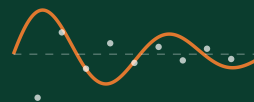
Streszczenie wykładu 1

Funkcje jednej zmiennej. Funkcje elementarne

Funkcja, dziedzina, miejsca zerowe • monotoniczność i parzystość •
złożenie funkcji i funkcja odwrotna • funkcje elementarne i ich
zastosowania w ochronie środowiska

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Funkcja jednej zmiennej

Definicja (funkcja)

Jeżeli każdej wartości x ze zbioru X przyporządkujemy **dokładnie jedną** wartość y ze zbioru Y , to y nazywamy funkcją zmiennej x i zapisujemy $y = f(x)$.

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Definicja (dziedzina, miejsce zerowe)

Dziedziną D nazywamy zbiór, na którym funkcja jest określona, a **zbiorem wartości** – zbiór wszystkich wartości funkcji. **Miejszem zerowym** nazywamy argument x , dla którego $f(x) = 0$.

[GS, Funkcje]

★ Zapamiętaj

Najczęstsze ograniczenia dziedziny: $\sqrt[n]{g(x)}$, n parzyste $\Rightarrow g(x) \geq 0$; $\frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$;

$\log_a g(x) \Rightarrow g(x) > 0$.

W zastosowaniach dziedzinę ograniczamy dodatkowo do wartości mających **sens fizyczny** (np. objętość, czas, stężenie ≥ 0).

Przykład 1

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$: $25 - x^2 \geq 0 \iff -5 \leq x \leq 5$, $D = \langle -5; 5 \rangle$.

b) $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x+1)}$: mianownik $\neq 0$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

c) Stężenie $c(V) = \frac{50}{V}$ [mg/l] po rozpuszczeniu 50 mg substancji w V litrach wody: matematycznie $V \neq 0$, ale fizycznie $V > 0$.

Definicja (monotoniczność, parzystość)

Funkcja f jest **rosnąca**, gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, a **malejąca**, gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
 Funkcja jest **parzysta**, gdy $f(-x) = f(x)$ (wykres symetryczny względem osi Oy), a **nieparzysta**,
 gdy $f(-x) = -f(x)$ (wykres symetryczny względem początku układu).

[GS, Funkcje]

Przykład 2

$f(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$: miejsca zerowe $x = \pm 2$; funkcja maleje na $(-\infty; 0)$, rośnie na $(0; \infty)$; jest parzysta, bo $(-x)^2 - 4 = x^2 - 4$.

2 Złożenie funkcji i funkcja odwrotna**Definicja (złożenie funkcji)**

Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; f – funkcja *wewnętrzna*, g – *zewnętrzna*.

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Przykład 3

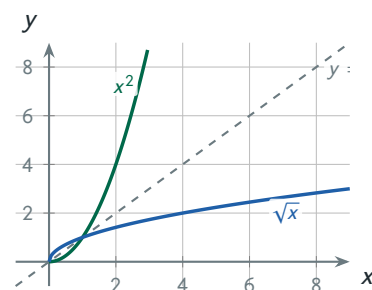
$f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$: $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ ($x \geq 0$), $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. Na ogół $f \circ g \neq g \circ f$.

Funkcja $h(t) = e^{-0,1t}$ jest złożeniem $g(u) = e^u$ i $u(t) = -0,1t$.

Definicja (funkcja odwrotna)

Funkcja g jest **odwrotna** do f (oznaczamy f^{-1}), gdy $g(f(x)) = x$ i $f(g(y)) = y$. Funkcja jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa i „na”. Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$.

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Rys. 1. $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, i $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Jak wyznaczyć f^{-1} ? Z równania $y = f(x)$ wyznaczamy x .

Przykład 4 – skale temperatur

$F = 1,8 C + 32$ (stopnie Celsjusza $\rightarrow$ Fahrenheita). Funkcja odwrotna: $C = \frac{F-32}{1,8}$; np. $50^\circ F = 10^\circ C$.

3 Funkcje elementarne

Funkcja liniowa i kwadratowa

liniowa: $y = ax + b$; a – współczynnik kierunkowy (tempo zmian), wykres – prosta

kwadratowa: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, wierzchołek $W(p, q)$: $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$

miejsca zerowe: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($\Delta > 0$), $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ($\Delta = 0$), brak ($\Delta < 0$)

[KW1]

Przykład 5

a) Stężenie CO_2 : $C(t) = 424 + 2,4t$ [ppm] (model przybliżony, t – lata od 2024 r.). Wartość 450 ppm zostanie osiągnięta po $t = \frac{450-424}{2,4} \approx 10,8$ roku.

b) Plon przy dawce azotu x [kg/ha]: $y = 30 + 0,8x - 0,004x^2$ [dt/ha]. Wierzchołek: $p = 100$, $q = 70$ – największy plon 70 dt/ha przy 100 kg/ha.

Definicja (funkcja wymierna i potęgowa)

Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów, określony tam, gdzie mianownik $\neq 0$. **Funkcja potęgowa**: $y = x^p$, $p \in \mathbb{R}$.

[GS, Funkcje elementarne]

Działania na potęgach i logarytmach ($x, y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^m = m \log_a x$$

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

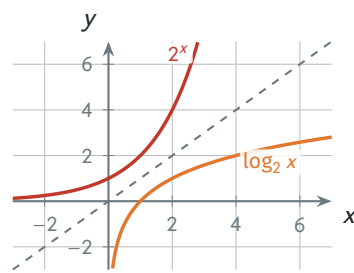
$$\log x = \log_{10} x, \quad \ln x = \log_e x$$

[GS, Funkcje elementarne]

Definicja (funkcja wykładnicza i logarytmiczna)

$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$) – rosnąca dla $a > 1$, malejąca dla $0 < a < 1$, zawsze $a^x > 0$. $y = \log_a x$ ($x > 0$) jest funkcją odwrotną do a^x .

[GS, Funkcje elementarne]



Rys. 2. Funkcje wzajemnie odwrotne.

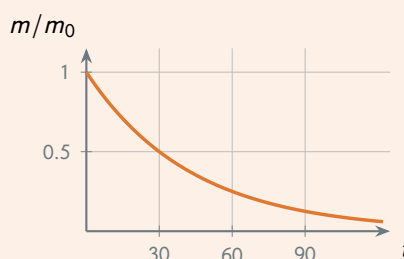
Przykład 6 – okres półtrwania

Pestycyd w glebie ma okres półtrwania $T = 30$ dni.

Pozostała masa: [HRW5, Fizyka jądrowa]

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$$

Po 90 dniach: $m(90) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} m_0$.



Definicja (pH i poziom hałasu)

Odczyn: $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, gdzie $[\text{H}^+]$ – stężenie jonów wodorowych $[\text{mol/l}]$. **Poziom natężenia dźwięku** [HRW2, Fale dźwiękowe]: $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ [dB], $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

[AB, Roztwory elektrolitów]

Przykład 7

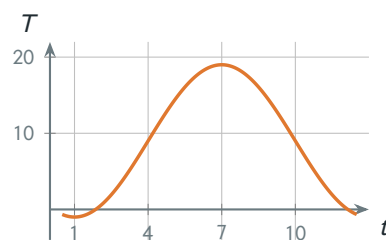
a) Deszcz naturalny: $\text{pH} = 5,6$; kwaśny deszcz $\text{pH} = 4,6$ ma $10^{5,6-4,6} = 10$ razy większe stężenie jonów H^+ .

b) Dwa jednakowe źródła hałasu: $L_2 = 10 \log \frac{2I}{I_0} = L + 10 \log 2 \approx L + 3 \text{ dB}$.

Funkcje trygonometryczne $y = \sin x$, $y = \cos x$ mają dziedzinę $\mathbb{R}$, zbiór wartości $\langle -1, 1 \rangle$ i okres 2π ; $\sin x$ jest nieparzysta, $\cos x$ – parzysta. [GS, Funkcje elementarne] Opisują zjawiska **okresowe**, np. średnią temperaturę miesięczną

$$T(t) = 9 + 10 \sin \frac{\pi(t-4)}{6},$$

z maksimum 19°C w lipcu ($t = 7$) i minimum -1°C w styczniu ($t = 1$).



Rys. 3. Sezonowy przebieg temperatury.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [AB] A. Bielański, *Podstawy chemii nieorganicznej*, t. 1, PWN, Warszawa 2010.
- [HRW2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 2, PWN, Warszawa 2015.
- [HRW5] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 5, PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.