

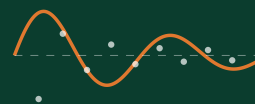
Streszczenie wykładu 1

Ciągi liczbowe i ich granice

Symbole logiczne i oznaczenia • ciąg liczbowy • ciąg arytmetyczny i geometryczny • granica ciągu • twierdzenia o granicach • liczba e

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Symbole i oznaczenia

Funktory zdaniotwórcze. Zmienne p, q, r nazywamy *zmiennymi zdaniowymi*. Zdania złożone (np. $p \wedge q \Rightarrow r$) zapisujemy za pomocą funktorów:

czytamy	symbol	nazwa
„i”	$\wedge$	koniunkcja
„lub”	$\vee$	alternatywa
„jeżeli ..., to ...”	$\Rightarrow$	implikacja
„wtedy i tylko wtedy”	$\Leftrightarrow$	równoważność
„nieprawda, że”	$\neg, \sim$	negacja

Kwantyfikatory.

- ▶ $\forall_{x \in X}$ (lub $\bigwedge_{x \in X}$) – „dla każdego x należącego do X ” – *kwantyfikator ogólny*;
- ▶ $\exists_{x \in X}$ (lub $\bigvee_{x \in X}$) – „istnieje takie x należące do X ” – *kwantyfikator szczegółowy*.

Znak sumy i iloczynu. Dla skończonego ciągu liczb $a_1, \dots, a_n$:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

gdzie i – wskaźnik bieżący, $i = 1$ – dolna, n – górna granica sumowania (iloczynu).

2 Ciąg liczbowy

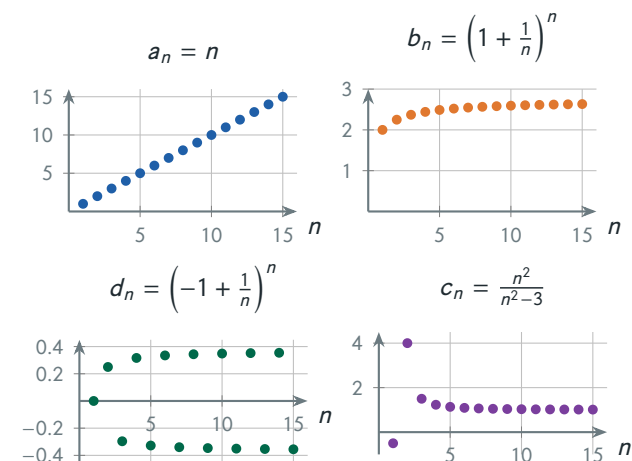
Definicja

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy **n -tym wyrazem ciągu** i oznaczamy a_n . Ciąg oznaczamy (a_n) , a zbiór jego wyrazów $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

[F1, Teoria granic]

Każdy wyraz ciągu można przedstawić na płaszczyźnie jako punkt (n, a_n) . Ciągi określamy:

- **opisowo**, np. a_n – kolejne liczby parzyste: 2, 4, 6, 8, ...;
- **rekurencyjnie**, np. $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + 1,5$: 0; 1,5; 3; 4,5; ...;
- **wzorem**, np. $a_n = \frac{1}{n^2}$: 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ...



Rys. 1. Wykresy przykładowych ciągów: $a_n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow e$, d_n – brak granicy, $c_n \rightarrow 1$.

2.1 Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Wzory

ciąg arytmetyczny (różnica r): $a, a + r, a + 2r, \dots$ $a_n = a + (n - 1)r$

ciąg geometryczny (iloraz q): $a, aq, aq^2, \dots$ $a_n = aq^{n-1}$

[KW1]

Twierdzenie (suma szeregu geometrycznego)

Jeżeli $|q| < 1$, to suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$ wynosi

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

[F1, Teoria granic]

Przykład 1

Zamień ułamek okresowy 0,2(30) na ułamek zwykły.

Rozwiązanie. $0,2(30) = 0,2 + \frac{30}{1000} + \frac{30}{100000} + \dots = 0,2 + 3 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right)$. Wyrażenie w nawiasie to szereg geometryczny z $a_1 = \frac{1}{10^2}$, $q = \frac{1}{10^2}$, więc

$$0,2(30) = 0,2 + 3 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 0,2 + 3 \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{33} = \frac{38}{165}.$$

3 Granica ciągu

Definicja (granica ciągu)

Ciąg (a_n) **ma granicę** g , co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, jeżeli

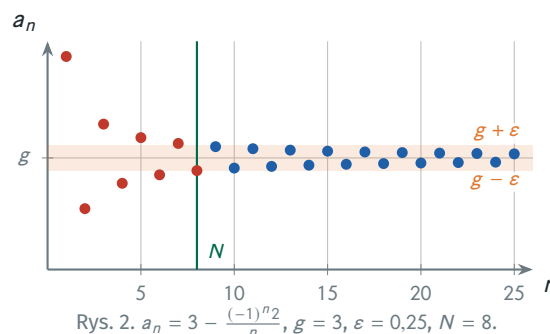
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - g| < \varepsilon,$$

tzn. dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdego $n > N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon$.

[F1, Teoria granic]

Interpretacja. Nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ oznacza $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Zatem wszystkie wyrazy ciągu, poza skończoną ich liczbą, leżą w pasie o szerokości 2ε wokół g – niezależnie od tego, jak wąski pas wybierzemy.

Jeżeli granica nie istnieje, ciąg nazywamy **rozbieżnym** (np. $a_n = (-1)^n$). Jeżeli $\lim a_n = \infty$ ($-\infty$), ciąg jest **rozbieżny do** ∞ ($-\infty$).



3.1 Ciągi monotoniczne i ograniczone

Definicja

Ciąg (a_n) jest **rosnący**, gdy $a_{n+1} > a_n$, **malejący**, gdy $a_{n+1} < a_n$ (dla $n \in \mathbb{N}$); analogicznie definiujemy ciągi **niemalejące** ($a_{n+1} \geq a_n$) i **nierosnące** ($a_{n+1} \leq a_n$). Ciąg jest **ograniczony**, gdy istnieją $m, M \in \mathbb{R}$ takie, że $m \leq a_n \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

[F1, Teoria granic]

Twierdzenie

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

[F1, Teoria granic]

Np. ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący i $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$, zatem jest zbieżny; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

3.2 Podstawowe granice i twierdzenia

Podstawowe granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla } a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \quad \text{dla } a > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad \text{dla } |a| < 1$$

[GS, Ciągi liczbowe]

Twierdzenie (o arytmetyce granic ciągów)

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, jeśli $b \neq 0$,
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_n \geq 0$.

Ponadto: jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{a_n} = 0$; jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $a_n > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{a_n} = +\infty$ dla $c > 0$.

[GS, Ciągi liczbowe]

★ Zapamiętaj

Symbole nieoznaczone: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ .

Ich wartości nie można ustalić z samych granic składników – wyrażenie trzeba najpierw przekształcić. Np. dla ilorazu wielomianów dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n z mianownika.

Przykład 2

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{3n^2 - 2n + 5}$.

Rozwiązanie. Dzielimy licznik i mianownik przez n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{3n^2 - 2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Przykład 3

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5n}{n + 1}$.

Rozwiązanie. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 5}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0 - 5}{1 + 0} = \boxed{-5}$.

4 Liczba e

Twierdzenie (określenie liczby e)

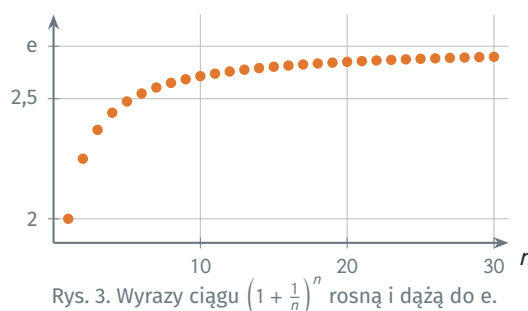
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

ogólniej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \text{gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty, a_n \neq 0.$$

Liczba $e \approx 2,71828$ jest podstawą logarytmu naturalnego.

[F1, Teoria granic]



Rys. 3. Wyrazy ciągu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rosną i dążą do e.

Przykład 4

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{2n-2}$.

Rozwiązanie. Przekształcamy wyrażenie do postaci z twierdzenia o liczbie e (symbol 1^∞):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1+1}{n-1} \right)^{2(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \right]^2 = \boxed{e^2},$$

ponieważ dla $a_n = n-1 \rightarrow \infty$ wyrażenie w nawiasie kwadratowym dąży do e.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krynicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.