

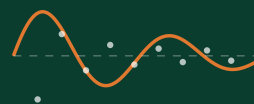
Streszczenie wykładu 2

Ciągi liczbowe. Granica i ciągłość funkcji, asymptoty

Ciąg arytmetyczny i geometryczny • granica ciągu, liczba e • granica funkcji, granice jednostronne, ciągłość • obliczanie granic • asymptoty

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Ciągi liczbowe

Definicja (ciąg liczbowy)

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach rzeczywistych; a_n – n -ty wyraz ciągu.

[F1, Teoria granic]

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

arytmetyczny (stały przyrost r): $a_n = a_1 + (n - 1)r$

geometryczny (stały iloraz q): $a_n = a_1 q^{n-1}$; dla $|q| < 1$ suma wszystkich wyrazów: $S = \frac{a_1}{1 - q}$

[KW1]

Przykład 1

a) Na dnie zbiornika jest 12 cm osadu i co roku przybywa 1,5 cm: $a_n = 12 + 1,5n$; po 10 latach 27 cm.

b) Populacja 200 bobrów rośnie o 5% rocznie: $a_n = 200 \cdot 1,05^n$; po 10 latach ok. 326 osobników.

Definicja (granica ciągu)

Ciąg (a_n) ma **granice** g ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n > N$ – prawie wszystkie wyrazy leżą dowolnie blisko g . Ciąg bez granicy skończonej nazywamy **rozbieżnym**.

[F1, Teoria granic]

Podstawowe granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ dla } |q| < 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \text{ dla } q > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

[GS, Ciągi liczbowe]

★ Zapamiętaj

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ – wymagają przekształceń.

Dla $\frac{\infty}{\infty}$ **dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n .**

Przykład 2

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{3n^2 - 2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

c) Stężenie fosforu w jeziorze po ograniczeniu zrzutu ścieków: $c_n = 20 + 15 \cdot 0,8^n$ [$\mu\text{g/l}$]. Ponieważ $0,8^n \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 20$ – stężenie dąży do **stanu równowagi**.

2 Granica i ciągłość funkcji

Definicja (granica funkcji)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$; gdy x zbliża się do a , wartości $f(x)$ zbliżają się do g . Funkcja **nie musi** być określona w punkcie a .

[F1, Teoria granic]

Twierdzenie (granice jednostronne)

Granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją i są równe granice: lewostronna $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ($x < a$) i prawostronna $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ($x > a$).

[GS, Granice funkcji]

Definicja (ciągłość)

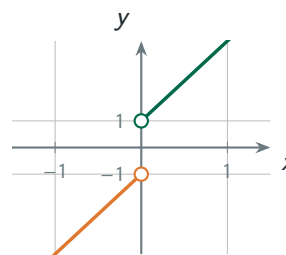
Funkcja f jest **ciągła w punkcie a** , gdy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

[GS, Ciągłość funkcji]

Przykład 3

$f(x) = 3x + \frac{|x|}{x}$: dla $x > 0$ mamy $f(x) = 3x + 1$, dla $x < 0$ – $f(x) = 3x - 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ – granica w $x = 0$ **nie istnieje**.



Rys. 1. Różne granice jednostronne.

3 Obliczanie granic funkcji

★ Zapamiętaj

1. Funkcja ciągła w punkcie a – **wstawiamy** a : $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 2x + 5) = 21$.
2. Symbol $\frac{0}{0}$ – **rozkładamy na czynniki** i skracamy: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$.
3. Symbol $\frac{\infty}{\infty}$ ($x \rightarrow \pm\infty$) – dzielimy przez najwyższą potęgę x : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{2+x} = 10$.
4. Symbol $\frac{\text{liczba}}{0}$ – badamy granice jednostronne: wynik $+\infty$ lub $-\infty$.

Ważne granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

[GS, Granice funkcji]

Przykład 4

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)(x+1)}: \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty.$$

4 Asymptoty

Definicja (asymptoty)

- ▶ **pionowa** $x = x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ (szukamy w punktach spoza dziedziny);
- ▶ **pozioma** $y = c$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$;
- ▶ **ukośna** $y = ax + b$: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$ (obie granice skończone).

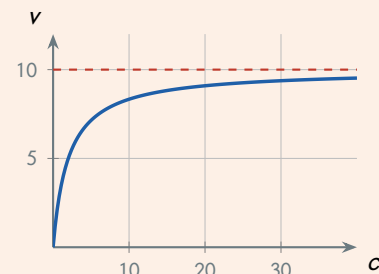
[GS, Asymptoty]

Przykład 5

a) $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x+1)}$: asymptoty pionowe $x = -1$, $x = 2$;
pozioma $y = 0$.

b) Tempo biodegradacji $v(c) = \frac{10c}{2+c}$: $\lim_{c \rightarrow \infty} v(c) = 10$
– asymptota pozioma $v = 10$ oznacza **maksymalne tempo rozkładu** (nasycenie).

c) $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^3} = 3$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x^2 + 1}{x^2} = -5$; asymptota ukośna $y = 3x - 5$.



Rys. 2. Asymptota pozioma – nasycenie.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.