

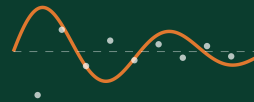
Streszczenie wykładu 2–3

Funkcje jednej zmiennej. Funkcje elementarne

Funkcja, dziedzina, wykres • monotoniczność, parzystość • złożenie funkcji • funkcja odwrotna • funkcje elementarne: wielomiany, funkcje wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Funkcja jednej zmiennej

Definicja (funkcja)

Jeżeli każdej wartości x należącej do zbioru X przyporządkujemy **dokładnie jedną** wartość y ze zbioru Y , to y nazywamy funkcją zmiennej x i zapisujemy $y = f(x)$, $f: X \rightarrow Y$.

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Definicja (wykres, dziedzina, miejsce zerowe)

Wykresem funkcji f nazywamy zbiór punktów (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, gdzie $y = f(x)$, $x \in D$.

Dziedziną $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy zbiór, na którym funkcja jest określona (zbiór argumentów), a

przeciwdziedziną – zbiór wszystkich wartości funkcji. **Miejscem zerowym** nazywamy argument x , dla którego $f(x) = 0$.

[GS, Funkcje]

★ Zapamiętaj

Najczęstsze ograniczenia dziedziny:

1. $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, n parzyste $\Rightarrow g(x) \geq 0$,

2. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$,

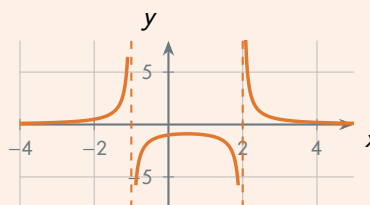
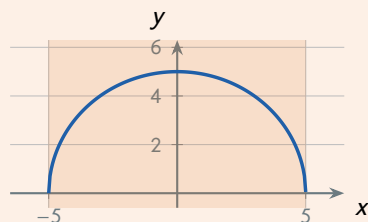
3. $f(x) = \ln[g(x)] \Rightarrow g(x) > 0$.

Czy to jest funkcja? Wykres przedstawia funkcję $y = f(x)$ wtedy, gdy każda pionowa prosta przecina go **co najwyżej raz**. Krzywa $x = y^2$ nie jest wykresem funkcji zmiennej x : dla $x = 3$ mamy dwie wartości $y = \pm\sqrt{3}$.

Przykład 1

Wyznacz dziedzinę funkcji a) $y = \sqrt{25 - x^2}$, b) $y = \frac{2}{(x-2)(x+1)}$.

Rozwiązanie. a) $25 - x^2 \geq 0 \iff -5 \leq x \leq 5$, zatem $D = \langle -5; 5 \rangle$. b) $(x-2)(x+1) \neq 0$, zatem $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.



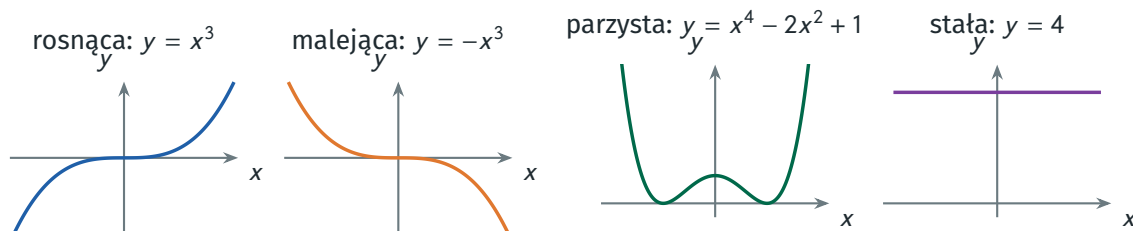
1.1 Monotoniczność, parzystość, funkcja stała

Definicja

Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest:

- ▶ **rosnąca**, gdy dla każdych $x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
- ▶ **malejąca**, gdy dla każdych $x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$;
- ▶ **parzysta**, gdy dla każdego $x \in X$ (także $-x \in X$): $f(-x) = f(x)$ – wykres symetryczny względem osi Oy ;
- ▶ **nieparzysta**, gdy dla każdego $x \in X$ (także $-x \in X$): $f(-x) = -f(x)$ – wykres symetryczny względem początku układu;
- ▶ **stała**, gdy każdemu argumentowi $x \in X$ przyporządkowana jest ta sama wartość $a \in Y$.

[GS, Funkcje]



Rys. 1. Przykłady funkcji rosnącej, malejącej, parzystej i stałej.

Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ jest parzysta.

Rozwiązanie. $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$, ponieważ $(-x)^{2n} = x^{2n}$. Funkcja jest parzysta.

2 Złożenie funkcji i funkcja odwrotna

Definicja (złożenie funkcji)

Niech $f: X \rightarrow Y$ oraz $g: Y \rightarrow Z$. **Złożeniem** funkcji f i g nazywamy funkcję $h: X \rightarrow Z$ daną wzorem $h(x) = g(f(x))$; oznaczamy ją $g \circ f$. Funkcję f nazywamy *funkcją wewnętrzną*, a g – *funkcją zewnętrzną*. Dla dowolnych funkcji zachodzi: $j \circ (g \circ f) = (j \circ g) \circ f$.

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Przykład 3

Dla $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ wyznacz $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$.

Rozwiązanie. $f \circ f = f(x^2) = x^4$; $f \circ g = (\sqrt{x})^2 = x$; $g \circ f = \sqrt{x^2} = |x|$; $g \circ g = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$.

Przykład 4

Z jakich funkcji elementarnych złożona jest funkcja $f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{x-7}} + 2$?

Rozwiązanie. $f = g \circ h \circ l \circ k \circ p$, gdzie $g(x) = x + 2$, $h(x) = \sqrt{x}$, $l(x) = 5 + x$, $k(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = x - 7$.

Definicja (funkcja odwrotna)

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy **odwracalną**, gdy istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$ oraz $f(g(y)) = y$ dla każdego $y \in Y$. Funkcję g nazywamy **funkcją odwrotną** do f i oznaczamy f^{-1} .

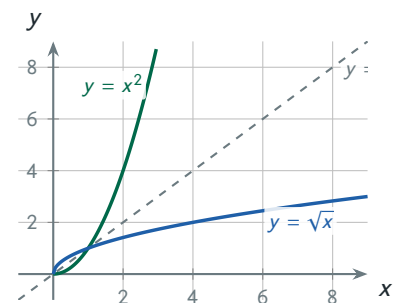
[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Twierdzenie

Funkcja f jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest **różnowartościowa** ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) i odwzorowuje X na Y ($\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$).

[F1, Funkcje jednej zmiennej]

Wykresy funkcji f i f^{-1} są **symetryczne względem prostej** $y = x$.



Rys. 2. $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, i $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

3 Funkcje elementarne

3.1 Funkcje wymierne

Definicja

Wielomianem (funkcją całkowitą wymierną) nazywamy funkcję $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_n$ są stałymi. **Funkcją ułamkową wymierną** nazywamy iloraz dwóch wielomianów; jej dziedziną jest $\mathbb{R}$ bez miejsc zerowych mianownika.

[GS, Funkcje elementarne]

Funkcja kwadratowa – trzy postacie

ogólna: $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q, \quad \Delta = b^2 - 4ac, \quad p = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$

iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ dla $\Delta > 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$y = a(x - x_0)^2$ dla $\Delta = 0, \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$

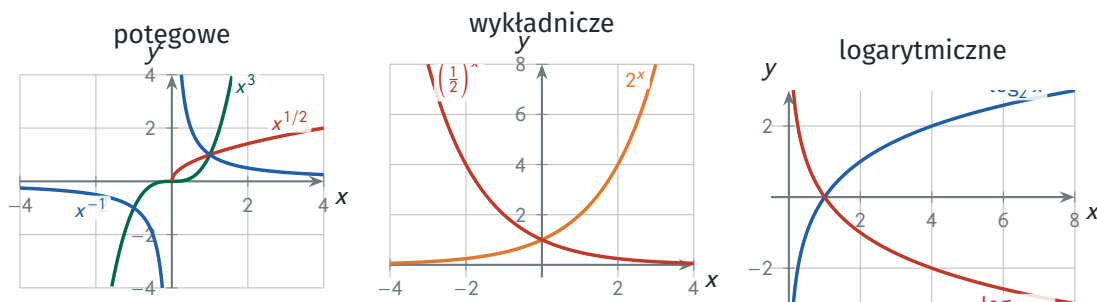
[KW1]

3.2 Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna

Definicja

- **Funkcja potęgowa:** $y = x^p, p \in \mathbb{R}$. Dla p całkowitego jest to funkcja wymierna; dla p będącego ułamkiem o mianowniku parzystym jest określona tylko dla $x \geq 0$; dla p niewymiernego zakładamy $x > 0$.
- **Funkcja wykładnicza:** $y = a^x, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$. Dla $a > 1$ jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ – malejąca. Prosta $y = 0$ jest jej asymptotą poziomą.
- **Funkcja logarytmiczna:** $y = \log_a x, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}_+$, taka, że $a^y = x$. Jest odwrotna do funkcji wykładniczej; prosta $x = 0$ jest jej asymptotą pionową. Szczególne przypadki: $\log_{10} x = \log x, \log_e x = \ln x$.

[GS, Funkcje elementarne]



Rys. 3. Wykresy funkcji potęgowych, wykładniczych i logarytmicznych.

Działania na potęgach i logarytmach ($x, y > 0$; $a, c > 0, a, c \neq 1$)

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad x^a / x^b = x^{a-b}$$

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad (x/y)^a = x^a / y^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = 1/x^a$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad y = \log_a a^y$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^m = m \log_a x, \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

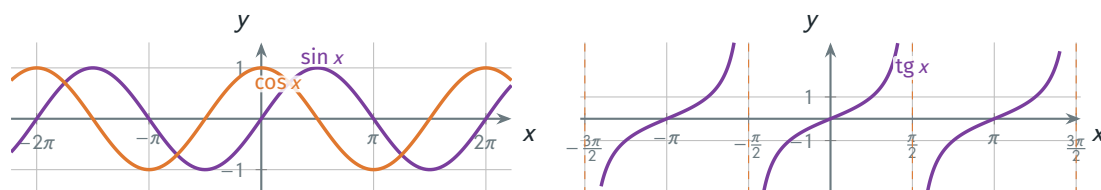
[GS, Funkcje elementarne]

3.3 Funkcje trygonometryczne

Własności funkcji trygonometrycznych ($k \in \mathbb{Z}$)

	dziedzina	zbiór wartości	miejsca zerowe	parzystość, okres
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$x = k\pi$	nieparzysta, $T = 2\pi$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	parzysta, $T = 2\pi$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	$x = k\pi$	nieparzysta, $T = \pi$
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\mathbb{R}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	nieparzysta, $T = \pi$

[GS, Funkcje elementarne]



Rys. 4. Wykresy funkcji $\sin x$, $\cos x$ oraz $\operatorname{tg} x$ (asymptoty pionowe $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).

3.4 Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcje cyklometryczne są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych obciętych do przedziałów, na których są one różnowartościowe:

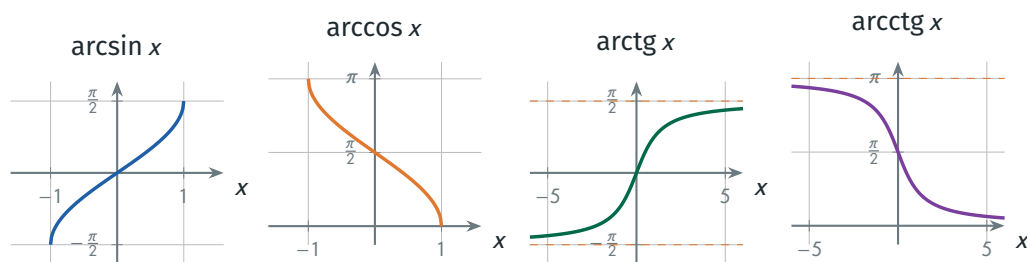
$\arcsin: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ – odwrotna do $\sin x$ obciętego do $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,

$\arccos: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \pi \rangle$ – odwrotna do $\cos x$ obciętego do $\langle 0, \pi \rangle$,

$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – odwrotna do $\operatorname{tg} x$ obciętego do $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ – odwrotna do $\operatorname{ctg} x$ obciętego do $(0, \pi)$.

[GS, Funkcje elementarne]



Rys. 5. Wykresy funkcji cyklometrycznych.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.