

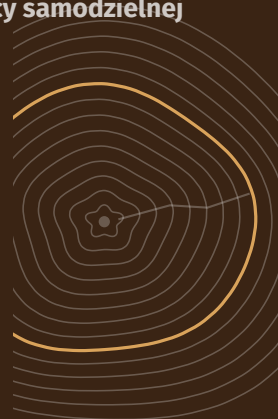
Streszczenie wykładów 3–4

Pochodna funkcji i jej zastosowania

Blok II (25.10.2026) • iloraz różnicowy, pochodna i jej interpretacja • reguły różniczkowania, pochodna funkcji złożonej • tempo zmian, styczna, druga pochodna • reguła de L'Hospitala • monotoniczność i ekstrema • zadania optymalizacyjne (belka z kłody, pojemnik, koszty) • wypukłość

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Iloraz różnicowy i pochodna

Definicja (iloraz różnicowy)

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu x_0 . Dla przyrostu argumentu $\Delta x \neq 0$ przyrost wartości funkcji wynosi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. **Ilorazem różnicowym** nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Geometrycznie jest to współczynnik kierunkowy **siecznej** wykresu przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$; gdy $y = f(t)$ zależy od czasu – **średnie tempo zmian** na przedziale $\langle t_0; t_0 + \Delta t \rangle$.

[GS, Pochodne funkcji]

Przykład 1 – średnie tempo suszenia

Wilgotność tarcicy w suszarni (model przybliżony, blok I): $u(t) = 8 + 52e^{-0,05t}$ [%], t w godzinach. W pierwszej dobie: $u(0) = 60\%$, $u(24) \approx 23,7\%$, więc

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{23,7 - 60}{24} \approx -1,51 \text{ \% / h}$$

– wilgotność malała średnio o ok. 1,5 punktu procentowego na godzinę.

Definicja (pochodna funkcji w punkcie)

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego, gdy przyrost argumentu dąży do zera:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

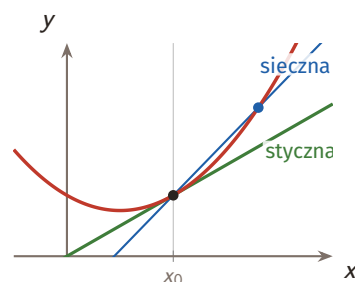
o ile ta granica istnieje i jest skończona. Jeżeli pochodna istnieje w każdym punkcie przedziału, to otrzymujemy nową funkcję $f'(x)$. Oznaczenia: $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$.

[GS, Pochodne funkcji]

Twierdzenie (interpretacja geometryczna)

Gdy $\Delta x \rightarrow 0$, sieczna przechodzi w **styczną**.
 Pochodna $f'(x_0)$ jest współczynnikiem
 kierunkowym stycznej do wykresu w punkcie
 $(x_0, f(x_0))$: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α – kąt nachylenia
 stycznej do osi Ox .

[F1, Pochodne i różniczki]

Rys. 1. Gdy $\Delta x \rightarrow 0$, sieczna przechodzi w styczną.**Przykład 2 – pochodna z definicji**

Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = x^2$.

Rozwiązanie. Iloraz różnicowy: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Granica: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Np. $f'(1) = 2$, $f'(2) = 4$, $f'(0) = 0$ (w wierzchołku paraboli styczna jest pozioma).

2 Reguły różniczkowania**Pochodne funkcji elementarnych**

$$(c)' = 0 \quad (c - \text{stała})$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(x)' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

[GS, Pochodne funkcji]

Twierdzenie (reguły obliczania pochodnych)

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne, to:

suma i różnica: $(f \pm g)' = f' \pm g'$ stała razy funkcja: $(af)' = af'$

iloczyn: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ iloraz: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0$

funkcja złożona: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ – pochodna funkcji zewnętrznej razy pochodna funkcji wewnętrznej.

[GS, Pochodne funkcji]

★ Zapamiętaj

Przed różniczkowaniem pierwiastki i ułamki zapisujemy jako potęgi: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$, $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$.

Pochodna stałej jest równa 0, a stały czynnik „wychodzi” przed pochodną. Pochodna iloczynu **nie jest** iloczynem pochodnych!

Przykład 3 – funkcja potęgowa i suma

a) $(x^5)' = 5x^4$

b) $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

d) $(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $(3x^2 - 2x + 5)' = 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 6x - 2$

f) $\left(50 + \frac{2000}{x}\right)' = (50 + 2000x^{-1})' = -\frac{2000}{x^2}$

W f) $K(x) = 50 + \frac{2000}{x}$ to koszt suszenia 1 m³ przy załadunku x m³ (blok I); $K'(x) < 0$, więc koszt jednostkowy maleje ze wzrostem załadunku.

Przykład 4 – iloczyn i iloraz

a) $y = (2x^3 - 3)(2x + 1)$:

Rozwiązanie. $y' = (2x^3 - 3)'(2x + 1) + (2x^3 - 3)(2x + 1)' = 6x^2(2x + 1) + (2x^3 - 3) \cdot 2 = 12x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 6 = 16x^3 + 6x^2 - 6$.

b) $y = \frac{x^2}{x+1}$:

Rozwiązanie. $y' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

c) $y = x \ln x$: $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Przykład 5 – funkcja złożona

a) $((3x^2 + 1)^2)' = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x = 12x(3x^2 + 1)$

b) $(e^{-0,05t})' = e^{-0,05t} \cdot (-0,05) = -0,05 e^{-0,05t}$

c) $(\sqrt{25 - x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

d) $(\ln(1 + t^2))' = \frac{1}{1 + t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1 + t^2}$

W a) funkcją zewnętrzną jest $(\cdot)^2$, a wewnętrzną $3x^2 + 1$; w b) zewnętrzną $e^{(\cdot)}$, wewnętrzną $-0,05t$. Ogólnie: $(e^{kt})' = k e^{kt}$.

3 Pochodna jako tempo zmian. Styczna. Druga pochodna

★ Zapamiętaj

Jeżeli $y = f(t)$ opisuje wielkość zmieniającą się w czasie, to $f'(t_0)$ jest **chwilowym tempem (szybkością) zmian** tej wielkości w chwili t_0 [F1, Pochodne i różniczki]; jednostka pochodnej = jednostka y / jednostka t (np. %/h, cm/rok). $f'(t_0) > 0$ – wielkość rośnie, $f'(t_0) < 0$ – maleje. Jeżeli $K(x)$ jest kosztem produkcji x jednostek, to $K'(x)$ nazywamy **kosztem krańcowym** – jest to przybliżony koszt wytworzenia „kolejnej” jednostki.

Przykład 6 – tempo suszenia tarcicy

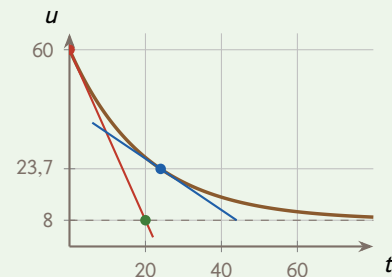
$u(t) = 8 + 52e^{-0,05t}$. Oblicz $u'(t)$, $u'(0)$ i $u'(24)$.

Rozwiązanie. Pochodna funkcji złożonej:

$$u'(t) = 0 + 52 \cdot e^{-0,05t} \cdot (-0,05) = -2,6 e^{-0,05t} \text{ [%/h]}.$$

$u'(0) = -2,6 \text{ %/h}$ – na początku wilgotność spada o 2,6 pkt proc. na godzinę;

$u'(24) = -2,6 e^{-1,2} \approx -0,78 \text{ %/h}$ – po dobie suszenie jest ponad trzy razy wolniejsze. Ponieważ $u'(t) < 0$ dla każdego t , wilgotność cały czas maleje.



Rys. 2. Styczne w $t = 0$ i $t = 24$ h.

Przykład 7 – przyrost grubości drzewa

Pierśnica drzewa (model przybliżony): $d(t) = 60(1 - e^{-0,02t})$ [cm], t – wiek w latach.

Rozwiązanie. $d'(t) = 60 \cdot (0 - e^{-0,02t} \cdot (-0,02)) = 1,2 e^{-0,02t}$ [cm/rok].

$d'(10) = 1,2e^{-0,2} \approx 0,98 \text{ cm/rok}$, $d'(50) = 1,2e^{-1} \approx 0,44 \text{ cm/rok}$. Drzewo przez cały czas przyrasta na grubość ($d' > 0$), ale coraz wolniej.

Przykład 8 – koszt krańcowy

Dzienny koszt przetarcia $x \text{ m}^3$ drewna (wartości przykładowe): $K(x) = 2000 + 50x + 0,2x^2$ [zł].

Rozwiązanie. $K'(x) = 50 + 0,4x$; $K'(40) = 66 \text{ zł/m}^3$ – przy produkcji 40 m^3 przetarcie kolejnego metra sześciennego kosztuje ok. 66 zł. Dla porównania dokładnie:

$$K(41) - K(40) = 66,2 \text{ zł}.$$

Równanie stycznej

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Kroki: 1) oblicz $f(x_0)$; 2) oblicz $f'(x)$ i $f'(x_0)$; 3) podstaw do wzoru i uporządkuj.

[F1, Pochodne i różniczki]

Przykład 9 – styczna

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$: $f(1) = 1$, $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$, $y = 2(x - 1) + 1 = y = 2x - 1$.

b) Styczna do krzywej suszenia w $t_0 = 0$: $u(0) = 60$, $u'(0) = -2,6$,
 $y = -2,6(t - 0) + 60 = y = 60 - 2,6t$. Gdyby suszenie trwało ciągle w tempie początkowym, wilgotność równowagową 8% osiągnęlibyśmy po $t = \frac{52}{2,6} = 20$ h (zielony punkt na rys. 2); w rzeczywistości suszenie zwalnia.

Definicja (pochodne wyższych rzędów)

Jeżeli funkcja f' ma pochodną, to funkcję $f'' = (f')'$ nazywamy **drugą pochodną** (pochodną rzędu drugiego) funkcji f . Analogicznie $f''' = (f'')'$ – pochodna trzeciego rzędu itd. Druga pochodna opisuje, jak zmienia się tempo zmian (w fizyce: przyspieszenie $a(t) = s''(t)$).

[GS, Pochodne funkcji]

Przykład 10 – druga pochodna

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$, $f'''(x) = 6$.

b) $u(t) = 8 + 52e^{-0,05t}$: $u'(t) = -2,6e^{-0,05t}$, $u''(t) = -2,6 \cdot (-0,05)e^{-0,05t} = 0,13e^{-0,05t} > 0$ – tempo u' rośnie (od $-2,6$ w stronę 0), czyli suszenie zwalnia.

c) $d(t) = 60(1 - e^{-0,02t})$: $d''(t) = -0,024e^{-0,02t} < 0$ – przyrost grubości maleje z wiekiem.

4 Reguła de L'Hospitala**Twierdzenie (reguła de L'Hospitala)**

Jeżeli przy $x \rightarrow c$ (także $c = \pm\infty$ oraz dla granic jednostronnych) iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ daje symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, to

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nieskończona).

[GS, Zastosowania pochodnych]

★ Zapamiętaj

Różniczkujemy **osobno** licznik i **osobno** mianownik – nie liczymy pochodnej ilorazu! Przed każdym użyciem reguły sprawdzamy (podstawiając), czy rzeczywiście mamy $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Regułę można stosować kilkakrotnie. Funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż każda potęga x , a potęga – szybciej niż logarytm.

Przykład 11

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1} = 12$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{50x + 2000}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{50}{1} = 50$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0 \quad (\text{reguła zastosowana dwukrotnie})$$

W a) ten sam wynik daje rozkład $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ (blok I). W c) otrzymujemy graniczny koszt suszenia 1 m³ przy bardzo dużym załadunku (asymptota pozioma $y = 50$ z bloku I).

5 Monotoniczność i ekstrema

Twierdzenie (monotoniczność)

Niech f ma pochodną w przedziale (a, b) . Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest w tym przedziale **rosnąca**; jeżeli $f'(x) < 0$ – **malejąca**; jeżeli $f'(x) = 0$ – **stała**.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Definicja (ekstrema lokalne)

Funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli istnieje otoczenie punktu x_0 , w którym $f(x) \leq f(x_0)$, a **minimum lokalne**, jeżeli $f(x) \geq f(x_0)$. Maksima i minima nazywamy **ekstremami**.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Twierdzenie (warunki istnienia ekstremum)

Warunek konieczny: jeżeli f ma ekstremum w x_0 i istnieje $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$ (styczna jest pozioma).

Warunek dostateczny: jeżeli $f'(x_0) = 0$ i pochodna f' zmienia znak w x_0 : z + na – w x_0 jest **maksimum**; z – na + – **minimum**.

[GS, Zastosowania pochodnych]

★ Zapamiętaj

Schemat: (1) dziedzina; (2) pochodna $f'(x)$ (najlepiej w postaci iloczynowej); (3) rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ – punkty podejrzone o ekstremum; (4) znak f' na osi liczbowej – przedziały monotoniczności; (5) ekstrema i ich wartości $f(x_0)$. Sam warunek $f'(x_0) = 0$ **nie wystarcza**: dla $y = x^3$ mamy $y'(0) = 0$, ale $y' = 3x^2 \geq 0$ nie zmienia znaku i ekstremum nie ma.

Przykład 12

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji
 $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Rozwiązanie. 1) $D = \mathbb{R}$.

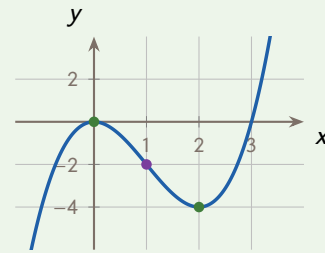
2) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

3) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ lub $x = 2$.

4) Znak f' (parabola o ramionach w górę, miejsca zerowe 0 i 2): $f' > 0$ na $(-\infty; 0)$ i $(2; \infty)$, $f' < 0$ na $(0; 2)$ – funkcja rośnie na $(-\infty; 0)$ i na $(2; \infty)$, maleje na $(0; 2)$.

5) W $x = 0$ znak zmienia się z + na -: $f_{\max} = f(0) = 0$;

w $x = 2$ z - na +: $f_{\min} = f(2) = 8 - 12 = -4$.



Rys. 3. Maksimum, minimum i punkt przegięcia (fioletowy).

Przykład 13 – zysk tartaku

Dzienny zysk tartaku [tys. zł] przy przetarciu x m³ drewna (blok I): $Z(x) = -0,5x^2 + 40x - 300$, $x \geq 0$.

Rozwiązanie. $Z'(x) = -x + 40$; $Z'(x) = 0 \iff x = 40$; $Z' > 0$ dla $x < 40$, $Z' < 0$ dla $x > 40$ – maksimum: $Z(40) = 500$ tys. zł. Wynik zgadza się z wierzchołkiem paraboli, ale metoda pochodnej działa dla dowolnych (nie tylko kwadratowych) funkcji.

6 Zadania optymalizacyjne

★ **Zapamiętaj**

Optymalizacja krok po kroku: (1) oznacz zmienne, narysuj rysunek, ustal, co ma być największe lub najmniejsze; (2) zapisz tę wielkość jako funkcję **jednej** zmiennej (**funkcja celu**), wykorzystując warunki zadania; (3) ustal dziedzinę wynikającą z sensu zadania; (4) oblicz pochodną, rozwiąż $f'(x) = 0$, zbadaj znak pochodnej; (5) odpowiedz na pytanie (wymiary, wartość optymalna, jednostki).

Definicja (wskaźnik wytrzymałości przekroju prostokątnego)

Dla belki o przekroju prostokątnym o szerokości b i wysokości h (obciążenie działa w kierunku wysokości) wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie wynosi

$$W = \frac{b h^2}{6}.$$

Im większy wskaźnik W , tym większy moment zginający może przenieść belka (przy tym samym materiale).

■ [NN, zginanie]

Przykład 14 – najbardziej wytrzymała belka z okrągłej kłody

Z okrągłej kłody o średnicy d wycinamy belkę o przekroju prostokątnym. Jakie powinny być wymiary b i h przekroju, aby belka była najbardziej wytrzymała na zginanie?

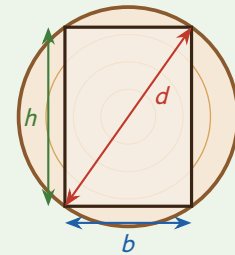
Rozwiązanie. Przekątna prostokąta jest średnicą kłody: $b^2 + h^2 = d^2$, więc $h^2 = d^2 - b^2$.

Funkcja celu: $W(b) = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} = \frac{d^2 b - b^3}{6}$, $b \in (0; d)$.

$W'(b) = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0 \iff b^2 = \frac{d^2}{3} \iff b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ (bo $b > 0$).

$W'(b) > 0$ dla $b < \frac{d}{\sqrt{3}}$, $W'(b) < 0$ dla $b > \frac{d}{\sqrt{3}}$ – **maksimum**. Wtedy $h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3}d^2$:

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}} \approx 0,577 d, \quad h = d\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816 d, \quad \frac{h}{b} = \sqrt{2} \approx 1,41$$



Rys. 4. Przekrój kłody i belki.

Liczbowo, dla $d = 30$ cm: $b = 10\sqrt{3} \approx 17,3$ cm, $h = 10\sqrt{6} \approx 24,5$ cm, $W_{\max} = \frac{d^3}{9\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \approx 1732$ cm³. Belka o przekroju kwadratowym ($b = h = \frac{d}{\sqrt{2}} \approx 21,2$ cm) ma $W \approx 1591$ cm³, czyli o ok. 8% mniej. Belkę ustawiamy „na wysokość” (dłuższy bok pionowo).

Przykład 15 – pojemnik o największej objętości

Z prostokątnego arkusza płyty pilśniowej 80×50 cm wycinamy w narożnikach kwadraty o boku x i zaginamy boki, otrzymując otwarty pojemnik. Dla jakiego x objętość jest największa?

Rozwiązanie. Dno ma wymiary $(80 - 2x) \times (50 - 2x)$, wysokość x :

$V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$, $x \in (0; 25)$.

$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \iff 3x^2 - 130x + 1000 = 0$; $\Delta = 16900 - 12000 = 4900$, $\sqrt{\Delta} = 70$,
 $x_1 = \frac{130-70}{6} = 10$, $x_2 = \frac{130+70}{6} = \frac{100}{3} \notin (0; 25)$.

$V' > 0$ na $(0; 10)$, $V' < 0$ na $(10; 25)$ – maksimum:

$$x = 10 \text{ cm}, \quad V_{\max} = 10 \cdot 60 \cdot 30 = 18000 \text{ cm}^3 = 18 \text{ l}.$$

Przykład 16 – najmniejszy koszt zamówień i magazynowania

Zakład meblarski zużywa rocznie 900 m^3 tarcicy, zamawiając ją w równych partiach po $x \text{ m}^3$. Koszt jednej dostawy wynosi 400 zł, a magazynowanie 1 m^3 przez rok – 50 zł; średni zapas w magazynie to $\frac{x}{2}$ (wartości przykładowe). Jaka wielkość partii daje najmniejszy koszt roczny?

Rozwiązanie. Liczba dostaw w roku: $\frac{900}{x}$. Koszt roczny: $K(x) = 400 \cdot \frac{900}{x} + 50 \cdot \frac{x}{2} = \frac{360000}{x} + 25x$, $x > 0$.

$K'(x) = -\frac{360000}{x^2} + 25 = 0 \iff x^2 = 14400 \iff x = 120$; $K' < 0$ dla $x < 120$, $K' > 0$ dla $x > 120$ – minimum.

$x = 120 \text{ m}^3$, $K_{\min} = 3000 + 3000 = 6000$ zł (średnio 7,5 dostawy rocznie). W optimum koszt dostaw jest równy kosztowi magazynowania.

7 Druga pochodna. Wypukłość

Twierdzenie (wypukłość, wklęsłość, punkt przegięcia)

Jeżeli $f''(x) > 0$ w przedziale (a, b) , to f jest w nim **wypukła** ($\cup$); jeżeli $f''(x) < 0$ – **wklęsła** ($\cap$).
Jeżeli $f''(x_0) = 0$ i f'' zmienia znak w x_0 , to $(x_0, f(x_0))$ jest **punktem przegięcia** wykresu.

 [GS, Zastosowania pochodnych]

Twierdzenie (warunek dostateczny istnienia ekstremum – II postać)

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to f ma w x_0 **maksimum**; jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ – **minimum**.

 [GS, Zastosowania pochodnych]

Przykład 17

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$: $f''(x) = 6x - 6 = 0 \iff x = 1$; $f'' < 0$ na $(-\infty; 1)$ – wklęsła, $f'' > 0$ na $(1; \infty)$ – wypukła; punkt przegięcia $P(1; -2)$ (rys. 3). Sprawdzenie ekstremów: $f''(0) = -6 < 0$ – maksimum, $f''(2) = 6 > 0$ – minimum.

b) Belka: $W''(b) = -b < 0$ – w $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ jest maksimum; koszt: $K''(x) = \frac{720\,000}{x^3} > 0$ – w $x = 120$ jest minimum.

c) Krzywa suszenia: $u' < 0$, $u'' > 0$ – wilgotność maleje coraz wolniej (wykres wypukły); pierśnica: $d' > 0$, $d'' < 0$ – rośnie coraz wolniej (wykres wklęsły).

★ Zapamiętaj

$f' > 0$, $f'' > 0$ – rośnie coraz szybciej; $f' > 0$, $f'' < 0$ – rośnie coraz wolniej; $f' < 0$, $f'' > 0$ – maleje coraz wolniej; $f' < 0$, $f'' < 0$ – maleje coraz szybciej.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
[KW1] W. Krysiński, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
[GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
[NN] M. E. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Wytrzymałość materiałów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.