

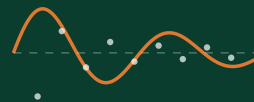
Streszczenie wykładu 3

Pochodna funkcji

Iloraz różnicowy • pochodna w punkcie i jej interpretacja geometryczna • reguły różniczkowania • pochodne funkcji elementarnych • pochodna funkcji złożonej • pochodna jako tempo zmian • różniczka

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Iloraz różnicowy i pochodna

Definicja (iloraz różnicowy)

Dla przyrostu argumentu $\Delta x \neq 0$ **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Geometrycznie jest to współczynnik kierunkowy **siecznej** wykresu; fizycznie – **średnie tempo zmian** wielkości y na przedziale $\langle x_0, x_0 + \Delta x \rangle$.

[GS, Pochodne funkcji]

Definicja (pochodna)

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

o ile istnieje i jest skończona. Oznaczenia: $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$.

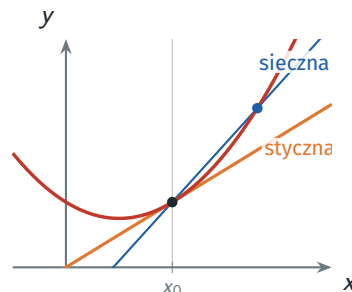
[GS, Pochodne funkcji]

Twierdzenie (interpretacja geometryczna)

$f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym **stycznej** do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Równanie stycznej:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

[F1, Pochodne i różniczki]



Rys. 1. Gdy $\Delta x \rightarrow 0$, sieczna przechodzi w styczną.

Przykład 1 – pochodna z definicji

$$f(x) = x^2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 2x, \text{ więc } (x^2)' = 2x, \text{ np. } f'(2) = 4.$$

2 Reguły różniczkowania

Twierdzenie (reguły obliczania pochodnych)

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (af)' = af' \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{funkcja złożona})$$

 [GS, Pochodne funkcji]

Pochodne funkcji elementarnych

$$(c)' = 0$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(x)' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

 [GS, Pochodne funkcji]

Przykład 2

$$\text{a) } (3x^2 - 2x + 5)' = 6x - 2; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -\frac{2}{x^3}; \quad \text{c) } (\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\text{d) } ((2x^3 - 3)(2x + 1))' = 6x^2(2x + 1) + (2x^3 - 3) \cdot 2 = 16x^3 + 6x^2 - 6$$

$$\text{e) } \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Przykład 3 – funkcje złożone

$$((3x^2 + 1)^2)' = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x = 12x(3x^2 + 1) \quad (e^{-0,5t})' = -0,5 e^{-0,5t}$$

$$(\ln(1 + t^2))' = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$(\sqrt{25 - x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

3 Pochodna jako tempo zmian

★ Zapamiętaj

Jeżeli $y = f(t)$ opisuje wielkość zmieniającą się w czasie, to $f'(t_0)$ jest **chwilowym tempem zmian** tej wielkości [F1, Pochodne i różniczki] (jednostka: jednostka y na jednostkę czasu). $f'(t_0) > 0$ – wielkość rośnie, $f'(t_0) < 0$ – maleje.

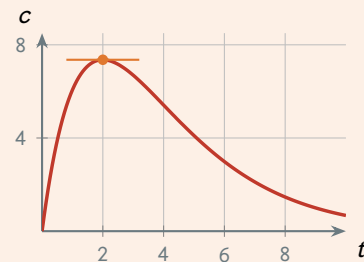
Przykład 4 – stężenie zanieczyszczenia w rzece

Po zrzućcie ścieków $c(t) = 10t e^{-0,5t}$ [mg/l], t w godzinach.

Rozwiązanie. $c'(t) = 10e^{-0,5t} + 10t \cdot (-0,5)e^{-0,5t} = 5e^{-0,5t}(2 - t)$.

$c'(1) \approx 3,03$ mg/(l·h) – stężenie rośnie; $c'(4) \approx -1,35$ – maleje;

$c'(2) = 0$ – maksimum stężenia $c(2) = \frac{20}{e} \approx 7,36$ mg/l.



Rys. 2. W maksimum styczna jest pozioma.

Przykład 5

a) Populacja $N(t) = 1000e^{0,2t}$: $N'(t) = 0,2 \cdot 1000e^{0,2t} = 0,2N(t)$ – tempo wzrostu proporcjonalne do liczebności.

b) Temperatura $T(t) = 9 + 10 \sin \frac{\pi(t-4)}{6}$: $T'(t) = \frac{10\pi}{6} \cos \frac{\pi(t-4)}{6}$; $T'(4) \approx 5,2^\circ\text{C/miesiąc}$, $T'(7) = 0$ (maksimum w lipcu).

c) Styczna do $y = x^2$ w $x_0 = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

4 Różniczka

Definicja (różniczka)

Różniczką funkcji nazywamy iloczyn $dy = f'(x) dx$. Dla małych przyrostów Δx różniczka przybliża przyrost funkcji:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x.$$

[F1, Pochodne i różniczki]

Przykład 6 – plama ropy

Pole plamy w kształcie koła: $P(r) = \pi r^2$, $P'(r) = 2\pi r$. Dla $r = 100$ m i $\Delta r = 2$ m:

$\Delta P \approx 2\pi \cdot 100 \cdot 2 \approx 1257$ m² (dokładnie $\pi(102^2 - 100^2) \approx 1269$ m²).

Literatura

[F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.

[KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.

[GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.