

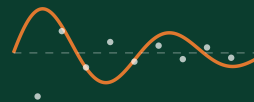
Streszczenie wykładu 4

Zastosowania pochodnej

Reguła de L'Hospitala • monotoniczność • ekstrema lokalne • optymalizacja • druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia • badanie przebiegu zmienności funkcji

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie (reguła de L'Hospitala)

Jeżeli przy $x \rightarrow c$ (także $c = \pm\infty$) iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ daje symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, to

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje.

[GS, Zastosowania pochodnych]

★ Zapamiętaj

Różniczkujemy **osobno** licznik i mianownik (nie liczymy pochodnej ilorazu!). Przed każdym użyciem reguły sprawdzamy, czy rzeczywiście mamy $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$. Regułę można stosować kilkakrotnie.

Przykład 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1} = 12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t}{e^{0.5t}} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{0.5e^{0.5t}} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Pierwsza granica w drugim wierszu oznacza, że stężenie zanieczyszczenia $c(t) = 10te^{-0.5t}$ w rzece po długim czasie spada do zera.

2 Monotoniczność i ekstrema

Twierdzenie (monotoniczność)

Jeżeli $f'(x) > 0$ na przedziale (a, b) , to f jest na nim **rosnąca**; jeżeli $f'(x) < 0$ – **malejąca**.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Definicja (ekstrema lokalne)

Funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli w pewnym otoczeniu x_0 zachodzi $f(x) \leq f(x_0)$, a **minimum lokalne**, jeżeli $f(x) \geq f(x_0)$.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Twierdzenie (warunki istnienia ekstremum)

Konieczny: jeżeli f ma ekstremum w x_0 i istnieje $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$.

Dostateczny: jeżeli $f'(x_0) = 0$ i f' zmienia znak w x_0 : $z +$ na $-$ – maksimum, $z -$ na $+$ – minimum.

Dostateczny (II postać): $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ – maksimum; $f''(x_0) > 0$ – minimum.

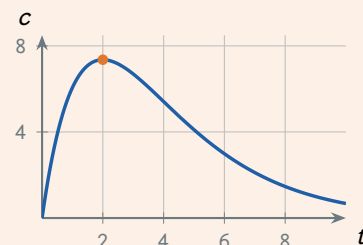
[GS, Zastosowania pochodnych]

★ Zapamiętaj

Schemat: (1) dziedzina, (2) $f'(x)$, (3) rozwiązanie $f'(x) = 0$, (4) znak f' na osi liczbowej, (5) wnioski o monotoniczności i ekstremach, wartości $f(x_0)$. Warunek $f'(x_0) = 0$ **nie wystarcza**: dla $y = x^3$ mamy $y'(0) = 0$, ale ekstremum nie ma.

Przykład 2 – szczyt fali zanieczyszczeń

$c(t) = 10te^{-0,5t}$, $t \geq 0$: $c'(t) = 5e^{-0,5t}(2 - t)$.
 $c'(t) = 0 \iff t = 2$; $c' > 0$ dla $t < 2$, $c' < 0$ dla $t > 2$.
 Maksimum: $c(2) = \frac{20}{e} \approx 7,36$ mg/l po 2 godzinach.



Przykład 3 – optymalizacja

Otwarty zbiornik o podstawie kwadratowej ma mieć objętość 32 m^3 . Przy boku podstawy a i wysokości $h = \frac{32}{a^2}$ pole powierzchni wynosi $S(a) = a^2 + \frac{128}{a}$, $a > 0$. $S'(a) = 2a - \frac{128}{a^2} = 0 \iff a = 4$; S' zmienia znak $z -$ na $+$ – minimum. Wymiary: $a = 4 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$, $S_{\min} = 48 \text{ m}^2$.

3 Druga pochodna i przebieg funkcji

Twierdzenie (wypukłość, punkt przegięcia)

Jeżeli $f''(x) > 0$ na (a, b) , to f jest **wypukła** ($\cup$); jeżeli $f''(x) < 0$ – **wklęsła** ($\cap$). Jeżeli $f''(x_0) = 0$ i f'' zmienia znak w x_0 , to $(x_0, f(x_0))$ jest **punktem przegięcia**.

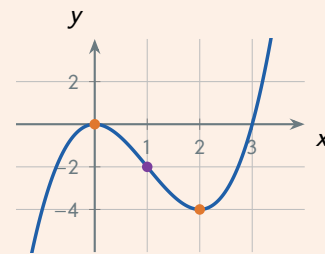
[GS, Zastosowania pochodnych]

★ Zapamiętaj

Badanie przebiegu zmienności funkcji: 1) dziedzina; 2) miejsca zerowe, punkty przecięcia z osiami, parzystość; 3) granice na krańcach dziedziny, asymptoty; 4) f' : monotoniczność, ekstrema; 5) f'' : wypukłość, punkty przegięcia; 6) tabela; 7) wykres.

Przykład 4 – $y = x^3 - 3x^2$

- 1) $D = \mathbb{R}$; 2) $x^2(x - 3) = 0$: $x \in \{0; 3\}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, brak asymptot;
- 4) $y' = 3x(x - 2)$: rośnie na $(-\infty; 0)$ i $(2; \infty)$, maleje na $(0; 2)$; $\max f(0) = 0$, $\min f(2) = -4$;
- 5) $y'' = 6x - 6$: wklęsła na $(-\infty; 1)$, wypukła na $(1; \infty)$; punkt przegięcia $P(1; -2)$.



Rys. 1. Max, min i punkt przegięcia.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysiński, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.