

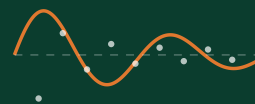
Streszczenie wykładu 4

Granica i ciągłość funkcji, asymptoty

Otoczenie punktu • granica funkcji (definicja Cauchy'ego) • granice jednostronne i niewłaściwe • ciągłość • obliczanie granic • asymptoty pionowe, poziome i ukośne

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Granica funkcji w punkcie

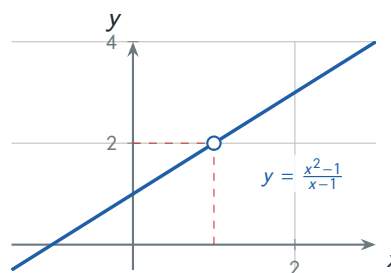
Definicja (otoczenie punktu)

Niech $\delta > 0$. **Otoczeniem** punktu a nazywamy przedział otwarty $(a - \delta, a + \delta)$ o środku w punkcie a .

[GS, Granice funkcji]

Intuicja. Badając granicę funkcji w punkcie a , sprawdzamy, do jakiej wartości zbliżają się wartości $f(x)$, gdy x zbliża się do a (z lewej i z prawej strony). Nie interesuje nas wartość $f(a)$ – funkcja nie musi być nawet określona w punkcie a .

Np. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ nie jest określona w $x = 1$, ale dla $x \neq 1$ mamy $f(x) = x + 1$, więc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.



Rys. 1. Granica w punkcie spoza dziedziny.

Definicja (granica funkcji – Cauchy'ego)

Funkcja $f(x)$ dąży do **granicy** g przy x dążącym do a , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, jeżeli

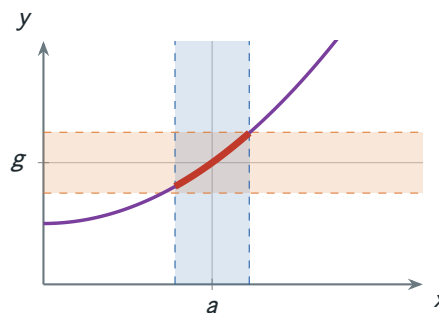
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon,$$

tzn. dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego x spełniającego $0 < |x - a| < \delta$ zachodzi $|f(x) - g| < \varepsilon$.

[F1, Teoria granic]

Interpretacja. Dla dowolnie wąskiego **pasa** ($g - \varepsilon, g + \varepsilon$) wokół g potrafimy wskazać **otoczenie** ($a - \delta, a + \delta$) punktu a , w którym wykres funkcji (poza ewentualnie punktem a) nie wychodzi poza ten pas.

Na rysunku: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, $a = 2$, $g = 2$; dla $\varepsilon = 0,5$ wystarczy $\delta = 0,44$.



Rys. 2. Pas ε wokół g i otoczenie δ punktu a .

1.1 Granice jednostronne

Definicja

Liczba g_1 jest **granicą lewostronną** funkcji f w punkcie a , $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g_1$, jeżeli dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, aby $|f(x) - g_1| < \varepsilon$ dla $0 < a - x < \delta$. Analogicznie **granicą prawostronną** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g_2$: $|f(x) - g_2| < \varepsilon$ dla $0 < x - a < \delta$.

[F1, Teoria granic]

Twierdzenie

Funkcja f ma w punkcie a granicę wtedy i tylko wtedy, gdy granice jednostronne istnieją i są równe: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$.

[GS, Granice funkcji]

Przykład 1

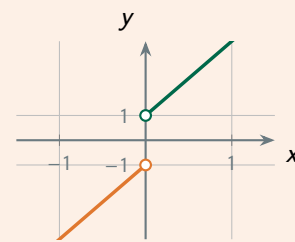
Zbadaj granicę funkcji $f(x) = 3x + \frac{|x|}{x}$ w punkcie $x = 0$.

Rozwiązanie.

Ponieważ $|x| = x$ dla $x \geq 0$ i $|x| = -x$ dla $x < 0$, mamy $f(x) = 3x + 1$ dla $x > 0$ oraz $f(x) = 3x - 1$ dla $x < 0$. Stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Granice jednostronne są różne, więc **granicą** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **nie istnieje**.



1.2 Ciągłość funkcji

Definicja (ciągłość)

Funkcja f jest **ciągła w punkcie** a , jeżeli ma granicę przy $x \rightarrow a$ i ta granica jest równa wartości funkcji w tym punkcie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Funkcja jest **ciągła w przedziale**, gdy jest ciągła w każdym jego punkcie; jej wykres nazywamy **linią ciągłą**.

[GS, Ciągłość funkcji]

2 Granice niewłaściwe i granice w nieskończoności

Definicja (granica niewłaściwa)

Jeżeli dla każdej liczby M można dobrać $\delta > 0$ tak, że dla wszystkich x spełniających $0 < |x - a| < \delta$ jest $f(x) > M$, to piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Analogicznie, gdy $f(x) < M$ – piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Podobnie określamy niewłaściwe granice jednostronne oraz granice przy $x \rightarrow \pm\infty$.

[F1, Teoria granic]

Wyrażenia z nieskończonością, których wartość jest określona

$$\begin{array}{lll} p + \infty = \infty & (-\infty < p \leq \infty) & \frac{p}{\infty} = 0 \quad (-\infty < p < \infty) \\ \frac{p}{0^+} = \infty & (0 < p \leq \infty) & p \cdot \infty = \infty \quad (0 < p \leq \infty) \\ \infty^q = 0 & (-\infty \leq q < 0) & p^\infty = 0 \quad (0^+ \leq p < 1) \\ & & \infty^q = \infty \quad (0 < q \leq \infty) & p^\infty = \infty \quad (1 < p \leq \infty) \end{array}$$

[GS, Granice funkcji]

3 Obliczanie granic funkcji

Twierdzenie (arytmetyka granic funkcji)

Jeżeli istnieją skończone granice $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, to granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji jest odpowiednio sumą, różnicą, iloczynem i ilorazem granic (iloraz – gdy $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$); ponadto $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Granice w nieskończoności liczymy analogicznie jak granice ciągów.

[GS, Granice funkcji]

★ Zapamiętaj

Schemat obliczania granicy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

1. Jeśli $a \in D$ i funkcja jest ciągła – **wstawiamy** a do wzoru: granica jest równa $f(a)$.
2. Jeśli otrzymujemy symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$ – **przekształcamy** wzór (rozkład na czynniki, wzory skróconego mnożenia, usuwanie niewymierności) i skracamy.
3. Jeśli otrzymujemy $\left[\frac{\text{liczba} \neq 0}{0}\right]$ – liczymy **granice jednostronne**, ustalając znak mianownika (0^+ lub 0^-).

Przykład 2

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 2x + 5)$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Rozwiązanie.

a) $x = -2 \in D$, więc $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 2x + 5) = 3 \cdot 4 + 4 + 5 = 21$.

b) Symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3$.

c) Symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{4} = 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$.

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

 [GS, Granice funkcji]

Przykład 3

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 4} (x-3)^{\frac{1}{x-4}}$.

Rozwiązanie. Symbol $[1^\infty]$. Zapisujemy $x-3 = 1 + (x-4) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-4}}$ i podstawiamy $z = \frac{1}{x-4}$.

Dla $x \rightarrow 4^+$ mamy $z \rightarrow +\infty$, a dla $x \rightarrow 4^-$ mamy $z \rightarrow -\infty$; w obu przypadkach $\lim \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$.

Granice jednostronne są równe, więc $\lim_{x \rightarrow 4} (x-3)^{\frac{1}{x-4}} = e$.

4 Asymptoty

Asymptotą wykresu funkcji nazywamy prostą, do której wykres zbliża się nieograniczenie, gdy punkt wykresu oddala się do nieskończoności. [F1, Asymptoty]

Definicja (asymptoty)

- ▶ Prosta $x = x_0$ jest **asymptotą pionową**, jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$. Asymptoty pionowe szukamy w punktach nieciągłości lub nieokreśloności funkcji.
- ▶ Prosta $y = c$ jest **asymptotą poziomą** w $+\infty$ (w $-\infty$), jeżeli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$).
- ▶ Prosta $y = ax + b$ jest **asymptotą ukośną** w $\pm\infty$, jeżeli istnieją skończone granice

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax].$$

(Dla $a = 0$ otrzymujemy asymptotę poziomą.)

[GS, Asymptoty]

Przykład 4 – asymptoty pionowe

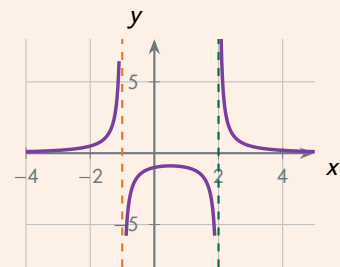
Wyznacz asymptoty pionowe funkcji $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x+1)}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Rozwiązanie.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

Proste $x = 2$ i $x = -1$ są asymptotami pionowymi. Ponadto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, więc $y = 0$ jest asymptotą poziomą.



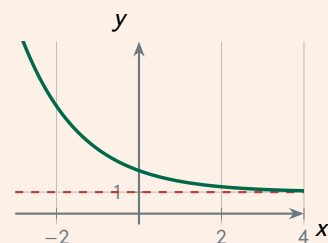
Przykład 5 – asymptota pozioma

Zbadaj asymptoty poziome funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

Rozwiązanie.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \right] = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ jest asymptotą poziomą w } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \right] = +\infty \Rightarrow \text{brak asymptoty poziomej w } -\infty.$$



Przykład 6 – asymptota ukośna

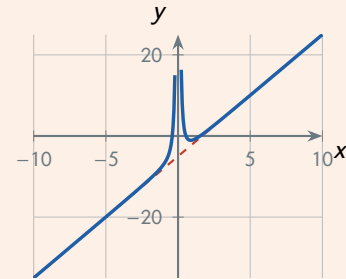
Wyznacz asymptotę ukośną funkcji $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$.

Rozwiązanie.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^3} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^2} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 1}{x^2} = -5.$$

Prosta $y = 3x - 5$ jest asymptotą ukośną (te same granice otrzymujemy dla $x \rightarrow -\infty$). Funkcja ma też asymptotę pionową $x = 0$.



Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.