

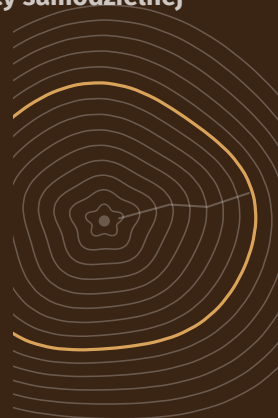
## Streszczenie wykładów 5–6

# Całka nieoznaczona i oznaczona

Blok III (21.11.2026) • funkcja pierwotna i całka nieoznaczona • tabela całek • całkowanie wprost, przez podstawienie i przez części • od tempa zmian do wielkości • całka oznaczona, wzór Newtona–Leibniza • pole obszaru • wartość średnia, wielkość całkowita • objętość bryły obrotowej – objętość kłody

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



## 1 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Całkowanie jest działaniem **odwrotnym** do różniczkowania: znając  $f(x)$ , szukamy funkcji  $F(x)$ , której pochodna jest równa  $f(x)$ .

### Definicja (funkcja pierwotna)

**Funkcją pierwotną** funkcji  $f(x)$  w przedziale  $(a, b)$  nazywamy każdą funkcję  $F(x)$  taką, że  $F'(x) = f(x)$  dla każdego  $x \in (a, b)$ .

[F2, Całka nieoznaczona]

### Twierdzenie

Jeżeli  $F$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f$ , to  $F + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) też jest jej funkcją pierwotną. Dwie funkcje pierwotne tej samej funkcji (w danym przedziale) różnią się o stałą.

[F2, Całka nieoznaczona]

### Definicja (całka nieoznaczona)

**Całką nieoznaczoną** funkcji  $f(x)$  nazywamy wyrażenie

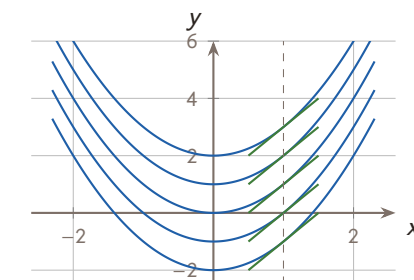
$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie } F'(x) = f(x),$$

$f(x)$  – funkcja podcałkowa,  $dx$  – różniczka zmiennej całkowania,  $F(x)$  – funkcja pierwotna,  $C$  – stała całkowania.

[GS, Całki nieoznaczone]

**Interpretacja geometryczna.** Wykresy wszystkich funkcji pierwotnych funkcji  $f$  powstają z jednego z nich przez przesunięcie wzdłuż osi  $Oy$ . W punktach o tej samej odciętej styczne do tych wykresów są równoległe – mają współczynnik kierunkowy  $f(x)$ . [F2, Całka nieoznaczona]

Np.  $\int 2x dx = x^2 + C$ : wszystkie parabole  $y = x^2 + C$  mają w punkcie  $x = 1$  styczne o nachyleniu 2.



Rys. 1. Rodzina funkcji pierwotnych  $y = x^2 + C$ .

## 2 Własności i wzory podstawowe

### Twierdzenie (własności całki nieoznaczonej)

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$
- $\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$  – każdy wynik można **sprawdzić przez różniczkowanie**.

 [GS, Całki nieoznaczone]

### Podstawowe wzory rachunku całkowego

$$\begin{array}{lll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 & \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int e^x dx = e^x + C \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1 & \int \cos x dx = \sin x + C & \int \sin x dx = -\cos x + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C & \int dx = x + C \end{array}$$

 [GS, Całki nieoznaczone]

### ★ Zapamiętaj

Pierwiastki zamieniamy na potęgi:  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ ,  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ . Np.

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

Całka iloczynu **nie jest** iloczynem całek, a całka ilorazu **nie jest** ilorazem całek:

$$\int f(x)g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx, \quad \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}.$$

## 3 Całkowanie wprost

Całkowanie wprost polega na takim przekształceniu funkcji podcałkowej (rozbiecie na sumę, zamiana pierwiastków na potęgi, podzielenie przez mianownik), aby można było zastosować własności 1–2 i wzory podstawowe.

### Przykład 1

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 6x + 5) dx &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^4 - 3x^2 + 5x + C \\ \int \left( 3\sqrt{x} - \frac{2}{x} \right) dx &= 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int \frac{dx}{x} = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2 \ln |x| + C = 2x\sqrt{x} - 2 \ln |x| + C \\ \int \frac{x^2 + 1}{x} dx &= \int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln |x| + C \end{aligned}$$

$$\int (2e^x + 3 \cos x) dx = 2e^x + 3 \sin x + C$$

Sprawdzenie pierwszego wyniku:  $(x^4 - 3x^2 + 5x + C)' = 4x^3 - 6x + 5$ .

## 4 Całkowanie przez podstawienie

### Twierdzenie (całkowanie przez podstawienie)

Jeżeli funkcja  $t = g(x)$  ma ciągłą pochodną, a funkcja  $f$  jest ciągła na zbiorze wartości funkcji  $g$ , to

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony podstawiamy  $t = g(x)$ .

[GS, Całki nieoznaczone]

**Schemat:** 1) wybieramy  $t = g(x)$  (zwykle funkcję wewnętrzną), 2) obliczamy  $dt = g'(x) dx$ , 3) zamieniamy całą całkę na zmienną  $t$ , 4) całkujemy, 5) wracamy do zmiennej  $x$ .

### Przykład 2

$$\begin{aligned} \int x e^{x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2, dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \\ \int (2x+3)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x+3, dt = 2 dx \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C = \frac{(2x+3)^6}{12} + C \\ \int \frac{2x}{x^2+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(x^2+1) + C \end{aligned}$$

### Wnioski z twierdzenia o podstawieniu

Jeżeli  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , to dla  $a \neq 0$  (podstawienie  $t = ax + b$ ,  $dt = a dx$ ):

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad \text{w szczególności} \quad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

Licznik jest pochodną mianownika (podstawienie  $t = f(x)$ ):  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$ . [GS, Całki nieoznaczone]

### Przykład 3

$$\begin{aligned} \int e^{-0,05t} dt &= \frac{e^{-0,05t}}{-0,05} + C = -20 e^{-0,05t} + C, \\ \int \cos(3x) dx &= \frac{1}{3} \sin(3x) + C, \\ \int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx &= \ln |x^3+2x| + C \quad (\text{licznik jest pochodną mianownika}). \end{aligned}$$

## 5 Całkowanie przez części

### Twierdzenie (całkowanie przez części)

Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

[GS, Całki nieoznaczone]

Wzór wynika z całkowania wzoru na pochodną iloczynu  $(fg)' = f'g + fg'$ . Za  $f$  wybieramy funkcję, która po różniczkowaniu się upraszcza (np.  $x$ ,  $\ln x$ ), a za  $g'$  – funkcję łatwą do scałkowania (np.  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ , 1).

### Przykład 4

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} f = x & g' = e^x \\ f' = 1 & g = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + C$$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} f = x & g' = e^{-x} \\ f' = 1 & g = -e^{-x} \end{array} \right| = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x + 1)e^{-x} + C$$

## 6 Od tempa zmian do wielkości

Jeżeli znamy **tempo zmian** wielkości, np.  $u'(t)$ , to samą wielkość otrzymujemy przez całkowanie:  $u(t) = \int u'(t) dt$ . Całka daje rodzinę funkcji; stałą  $C$  wyznaczamy z **warunku początkowego** (np. znanej wartości w chwili  $t = 0$ ).

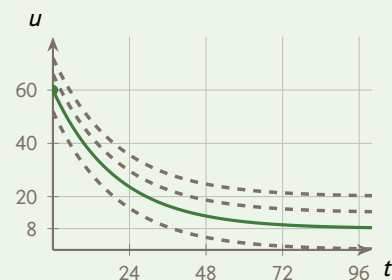
### Przykład 5 – wilgotność z tempa suszenia

Wilgotność tarcicy w suszarni maleje w tempie  $u'(t) = -2,6 e^{-0,05t}$  [%/h], a na początku  $u(0) = 60\%$  (model przybliżony). Wyznacz  $u(t)$ .

**Rozwiązanie.** Ze wzoru na  $\int e^{kt} dt$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int -2,6 e^{-0,05t} dt = \frac{-2,6}{-0,05} e^{-0,05t} + C \\ &= 52 e^{-0,05t} + C. \end{aligned}$$

Z warunku  $u(0) = 60$ :  $52 + C = 60$ ,  $C = 8$ , zatem  $u(t) = 8 + 52 e^{-0,05t}$ . Jest to krzywa suszenia z wykładu 1; wilgotność dąży do wilgotności równowagowej 8%.



Rys. 2. Rodzina funkcji pierwotnych i rozwiązanie z  $C = 8$ .

**Przykład 6 – koszt całkowity z kosztu krańcowego**

Koszt krańcowy przetarcia (koszt każdego kolejnego  $\text{m}^3$ ) wynosi  $K'(x) = 40 + 0,6x$  [zł/ $\text{m}^3$ ], a koszty stałe – 2000 zł (wartości przykładowe).

**Rozwiązanie.**  $K(x) = \int (40 + 0,6x) dx = 40x + 0,3x^2 + C$ ;  $K(0) = 2000 \Rightarrow C = 2000$ ,

$K(x) = 0,3x^2 + 40x + 2000$ . Koszt przetarcia 100  $\text{m}^3$ :  $K(100) = 3000 + 4000 + 2000 = 9000$  zł.

**7 Całka oznaczona****Definicja (suma całkowita, całka oznaczona)**

Niech  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  będzie podziałem przedziału  $[a, b]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , a  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  – dowolnymi punktami pośrednimi. Sumę  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  nazywamy **sumą całkową**. Jeżeli przy coraz drobniejszych podziałach ( $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ) sumy  $S_n$  dążą do tej samej granicy właściwej, niezależnie od wyboru punktów  $\xi_i$ , to granicę tę nazywamy **całką oznaczoną** funkcji  $f$  na  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

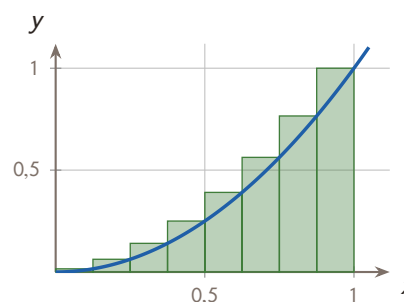
$a$  – dolna,  $b$  – górna granica całkowania. Całka oznaczona jest **liczbą**.

[F2, Całka oznaczona]

Funkcja ciągła na  $[a, b]$  jest na nim całkowna. [GS, Całki oznaczone]

**Interpretacja geometryczna.** Dla  $f \geq 0$  całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest polem obszaru pod wykresem  $f$  nad przedziałem  $[a, b]$ . [GS, Całki oznaczone]

Np. dla  $f(x) = x^2$  na  $[0, 1]$  i  $n$  równych części (wysokość prostokąta = wartość w prawym końcu):  $S_4 \approx 0,469$ ,  $S_8 \approx 0,398$ ,  $S_{16} \approx 0,365$ ,  $S_{32} \approx 0,349$ , a granica wynosi  $\frac{1}{3}$ .



Rys. 3. Suma całkowita dla  $f(x) = x^2$ ,  $n = 8$ .

**Twierdzenie (Newtona–Leibniza)**

Jeżeli  $f$  jest ciągła na  $[a, b]$ , a  $F$  jest dowolną jej funkcją pierwotną, to

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

[GS, Całki oznaczone]

Stała  $C$  nie ma znaczenia:  $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$ . Całkę oznaczoną obliczamy więc w dwóch krokach: wyznaczamy funkcję pierwotną (dowolną metodą z części 3-5), potem podstawiamy granice.

**Przykład 7**

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} & \int_1^3 (2x+1) dx &= \left[ x^2 + x \right]_1^3 = 12 - 2 = 10 \\ \int_0^\pi \sin x dx &= \left[ -\cos x \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2 & \int_1^e \frac{dx}{x} &= \left[ \ln x \right]_1^e = 1 - 0 = 1 \\ \int_0^1 x e^{x^2} dx &= \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2} & \int_0^1 x e^x dx &= \left[ e^x (x-1) \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

**Twierdzenie (własności całki oznaczonej)**

liniowość:  $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx$

addytywność:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b$

zamiana granic:  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0$

monotoniczność:  $f \leq g \text{ na } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

 [GS, Całki oznaczone]

## 8 Pole obszaru

**Pole obszaru**

- ▶ pole pod wykresem:  $P = \int_a^b |f(x)| dx$  – gdy  $f$  zmienia znak, dzielimy przedział w miejscach zerowych; części pod osią  $Ox$  liczymy ze znakiem minus,
- ▶ pole między krzywymi ( $f(x) \leq g(x)$  na  $[a, b]$ ):  $P = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$ .

**Schemat:** (1) szkic, (2) punkty przecięcia krzywych  $\Rightarrow$  granice  $a, b$ , (3) która funkcja jest „górna” (sprawdzamy w dowolnym punkcie przedziału), (4) całka.

 [GS, Zastosowania całek oznaczonych]

### Przykład 8 – funkcja zmieniająca znak

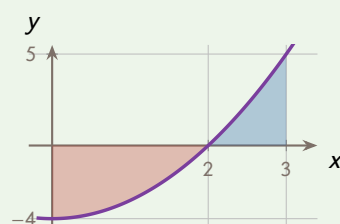
Pole obszaru między wykresem  $f(x) = x^2 - 4$  a osią  $Ox$  dla  $x \in [0, 3]$ .

**Rozwiązanie.** Miejsce zerowe w przedziale:  $x = 2$ ; na  $[0, 2]$   $f \leq 0$ , na  $[2, 3]$   $f \geq 0$ .

$$P = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

Uwaga:  $\int_0^3 (x^2 - 4) dx = 9 - 12 = -3 \neq P$ .



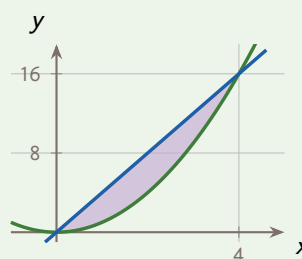
Rys. 4. Pole pod osią liczymy z minusem.

### Przykład 9 – pole między krzywymi

Pole obszaru ograniczonego krzywymi  $y = x^2$  i  $y = 4x$ .

**Rozwiązanie.** Punkty przecięcia:  $x^2 = 4x \iff x(x-4) = 0$ ,  $x \in \{0; 4\}$ . Na  $[0, 4]$  mamy  $4x \geq x^2$  (np. dla  $x = 1$ :  $4 > 1$ ), więc

$$P = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$



Rys. 5. Obszar między  $y = 4x$  i  $y = x^2$ .

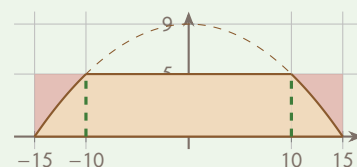
### Przykład 10 – przekrój deski nieobrzynanej

Deska nieobrzynana ma grubość 5 cm; jej dolna płaszczyzna ma szerokość 30 cm, a górna 20 cm. Obte krawędzie (fragmenty pobocznicy kłody) opisuje parabola  $y = 9 - \frac{x^2}{25}$  [cm] (model przybliżony; oś  $Ox$  na dolnej płaszczyźnie, oś  $Oy$  w środku deski). Oblicz pole przekroju i pole odpadu przy obrzynaniu.

**Rozwiązanie.** Parabola przechodzi przez punkty  $(15, 0)$  i  $(10, 5)$ . Przekrój to prostokąt  $30 \times 5$  cm bez dwóch obtżyn. Prawa obtżyna to obszar między prostą  $y = 5$  (górna) a parabolą (dolna) dla  $x \in [10; 15]$ :

$$P_o = \int_{10}^{15} \left[ 5 - \left( 9 - \frac{x^2}{25} \right) \right] dx = \int_{10}^{15} \left( \frac{x^2}{25} - 4 \right) dx = \left[ \frac{x^3}{75} - 4x \right]_{10}^{15} = (45 - 60) - \left( \frac{40}{3} - 40 \right) = \frac{35}{3}.$$

Pole przekroju:  $P = 30 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{35}{3} = \frac{380}{3} \approx 126,7 \text{ cm}^2$ . Po obrzynaniu do szerokości 20 cm zostaje prostokąt  $20 \cdot 5 = 100 \text{ cm}^2$ , a do odpadu trafia  $\frac{80}{3} \approx 26,7 \text{ cm}^2$ , tj. ok. 21% przekroju.



Rys. 6. Przekrój deski; na czerwono – brakujące części (obtżyny).

## 9 Wartość średnia i wielkość całkowita

### Twierdzenie (o wartości średniej)

Jeżeli  $f$  jest ciągła na  $[a, b]$ , to istnieje  $c \in [a, b]$  takie, że  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ . Liczbę

$$f_{\text{sr}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

nazywamy **wartością średnią** funkcji  $f$  na  $[a, b]$ . Prostokąt o podstawie  $[a, b]$  i wysokości  $f_{\text{sr}}$  ma to samo pole co obszar pod wykresem  $f$ .

 [GS, Całki oznaczone]

### Przykład 11 – średnia temperatura w suszarni

Podczas nagrzewania suszarni temperatura powietrza wynosi  $T(t) = 80 - 60e^{-0,25t}$  [°C],  $t$  w godzinach (model przybliżony). Średnia temperatura w ciągu pierwszych 12 godzin:

$$\begin{aligned} T_{\text{sr}} &= \frac{1}{12} \int_0^{12} (80 - 60e^{-0,25t}) dt = \frac{1}{12} \left[ 80t + 240e^{-0,25t} \right]_0^{12} = \frac{960 + 240e^{-3} - 240}{12} \\ &= 60 + 20e^{-3} \approx \boxed{61,0^\circ\text{C}}. \end{aligned}$$

### ★ Zapamiętaj

Jeżeli  $q(t)$  jest **natężeniem** (tempem) procesu, to wielkość całkowita w przedziale  $\langle t_1, t_2 \rangle$  wynosi

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt$$

– jest to **pole pod wykresem natężenia**. Przykłady: tempo odparowania wody [kg/h] → masa odparowanej wody [kg]; zużycie kleju na linii [kg/h] → zużycie na zmianę [kg]; moc [kW] → energia [kWh]; siła  $F(x)$  [N] na drodze  $x$  [m] → praca [J].

### Przykład 12 – woda odparowana z partii tarcicy

Partia tarcicy ma w stanie absolutnie suchym masę  $m_0 = 10$  t (wartość przykładowa) i suszy się jak w przykładzie 5. Z definicji wilgotności  $u = \frac{m - m_0}{m_0} \cdot 100\%$  [FK, Drewno a woda] masa wody w drewnie wynosi  $m_w = m - m_0 = m_0 \frac{u}{100}$ , więc woda odparowuje w tempie

$$q(t) = -m_0 \frac{u'(t)}{100} = 10\,000 \cdot \frac{2,6e^{-0,05t}}{100} = 260e^{-0,05t} \text{ [kg/h]}.$$

W ciągu pierwszej doby odparowało

$$Q = \int_0^{24} 260e^{-0,05t} dt = \left[ -5200e^{-0,05t} \right]_0^{24} = 5200(1 - e^{-1,2}) \approx \boxed{3634 \text{ kg}}.$$

Sprawdzenie:  $u(24) = 8 + 52e^{-1,2} \approx 23,66\%$ , więc wilgotność spadła o 36,34 punktu procentowego, a  $0,3634 \cdot 10\,000 \text{ kg} = 3634 \text{ kg}$ .

**Przykład 13 – praca przy przeciąganiu kłody**

Praca siły zmiennej  $F(x)$  działającej wzdłuż osi  $Ox$  na drodze od  $x_1$  do  $x_2$  wynosi  $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ . [HRW1, Energia kinetyczna i praca] Wyciągarka wciąga kłodę na pochylnię z rolkami, a potrzebna siła maleje:  $F(x) = 1500 - 60x$  [N],  $x \in [0; 20]$  m (model przybliżony).

$$W = \int_0^{20} (1500 - 60x) dx = \left[ 1500x - 30x^2 \right]_0^{20} = 30\,000 - 12\,000 = 18\,000 \text{ J} = 18 \text{ kJ}.$$

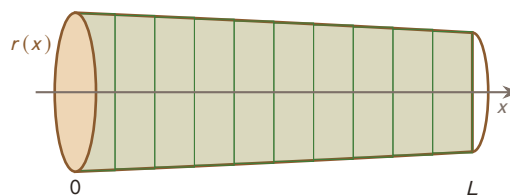
**10 Objętość bryły obrotowej – objętość kłody****Objętość bryły obrotowej**

Bryła powstała z obrotu wokół osi  $Ox$  obszaru pod wykresem ciągłej funkcji  $r(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , ma objętość

$$V = \pi \int_a^b r^2(x) dx.$$

[GS, Zastosowania całek oznaczonych]

**Skąd ten wzór?** Kłodę (bryłę) dzielimy na cienkie plastry grubości  $\Delta x$ . Plaster w miejscu  $x$  jest w przybliżeniu walcem o promieniu  $r(x)$ , więc  $\Delta V \approx \pi r^2(x) \Delta x$ . Sumując plastry i zagęszczając podział, otrzymujemy całkę – tak samo jak pole pod wykresem otrzymaliśmy z sumy prostokątów. Funkcja  $r(x)$  to **profil** kłody: promień w odległości  $x$  od czoła grubszego (odziomka).



Rys. 7. Kłoda podzielona na plastry (walce).

**Przykład 14 – walec i stożek ścięty**

a) **Walec**,  $r(x) = R$ :  $V = \pi \int_0^L R^2 dx = \pi R^2 [x]_0^L = \pi R^2 L$  – znany wzór (pole podstawy razy wysokość).

b) **Stożek ścięty**: promień maleje liniowo od  $R_1$  (odziomek) do  $R_2$  (czoło cieńsze),  $r(x) = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{L}x$ . Podstawienie  $t = r(x)$ ,  $dt = \frac{R_2 - R_1}{L}dx$ , granice:  $x = 0 \Rightarrow t = R_1$ ,  $x = L \Rightarrow t = R_2$ :

$$V = \pi \int_0^L r^2(x) dx = \frac{\pi L}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} t^2 dt = \frac{\pi L}{R_2 - R_1} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi L}{3} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$$

(skorzystaliśmy ze wzoru  $R_2^3 - R_1^3 = (R_2 - R_1)(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)$ ). Dla kłody o długości  $L = 5$  m i średnicach czoł  $d_1 = 40$  cm,  $d_2 = 30$  cm ( $R_1 = 0,2$  m,  $R_2 = 0,15$  m):

$$V = \frac{5\pi}{3} (0,04 + 0,03 + 0,0225) \approx 0,484 \text{ m}^3.$$

**Przykład 15 – paraboloida obrotowa i wzór Smaliana**

Przyjmijmy, że liniowo zmienia się **kwadrat** promienia (bryła jest wtedy fragmentem paraboloidy obrotowej):

$$r^2(x) = R_1^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{L} x, \quad x \in [0, L].$$

**Rozwiązanie.**

$$V = \pi \int_0^L \left( R_1^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{L} x \right) dx = \pi \left[ R_1^2 x + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2L} x^2 \right]_0^L = \pi L \left( R_1^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \right) = \pi L \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}.$$

Oznaczając pola przekrojów czół  $S_1 = \pi R_1^2$ ,  $S_2 = \pi R_2^2$ , otrzymujemy

$$V = L \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \quad \text{– wzór Smaliana.}$$

Objętość jest równa długości razy średnia arytmetyczna pól przekrojów obu czół – wystarczy zmierzyć długość kłody i średnice czół. Dla paraboloidy wzór ten jest **dokładny**. Dla  $L = 5$  m,  $d_1 = 40$  cm,  $d_2 = 30$  cm:  $V = 5 \cdot \frac{\pi \cdot 0,04^2 + \pi \cdot 0,0225^2}{2} \approx 0,491$  m<sup>3</sup>.

**Przykład 16 – wzór Hubera i porównanie**

**Wzór Hubera** traktuje kłodę jak walec o przekroju zmierzonym w połowie długości:  $V_H = S_m \cdot L$ , gdzie  $S_m = \pi r^2(\frac{L}{2})$ .

**Paraboloida:**  $r^2(\frac{L}{2}) = R_1^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$ , więc  $S_m = \frac{S_1 + S_2}{2}$  i  $V_H = L \frac{S_1 + S_2}{2}$  – wzór Hubera też jest dokładny. Uwaga: średnica w środku wynosi wtedy  $d_m = 2\sqrt{\frac{0,04^2 + 0,0225^2}{2}} \approx 0,354$  m, a nie 35 cm (średnia średnic czół).

**Stożek ścięty:**  $r(\frac{L}{2}) = \frac{R_1 + R_2}{2} = 0,175$  m,  $V_H = \pi \cdot 0,175^2 \cdot 5 \approx 0,481$  m<sup>3</sup>, Smalian: 0,491 m<sup>3</sup>, wartość dokładna (całka): 0,484 m<sup>3</sup>.

Objętości dla  $L = 5$  m,  $d_1 = 40$  cm,  $d_2 = 30$  cm:

| kształt kłody        | całka $\pi \int_0^L r^2 dx$ | Smalian                      | Huber                        |
|----------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| paraboloida obrotowa | 0,491 m <sup>3</sup>        | 0,491 m <sup>3</sup>         | 0,491 m <sup>3</sup>         |
| stożek ścięty        | 0,484 m <sup>3</sup>        | 0,491 m <sup>3</sup> (+1,4%) | 0,481 m <sup>3</sup> (-0,7%) |

**★ Zapamiętaj**

Objętość kłody o profilu  $r(x)$ :  $V = \pi \int_0^L r^2(x) dx$ . Wzór Smaliana  $V = L \frac{S_1 + S_2}{2}$  i wzór Hubera  $V = S_m L$  są **dokładne dla paraboloidy obrotowej** (gdy  $r^2$  zmienia się liniowo), a dla innych kształtów dają przybliżenie; dla stożka ściętego Smalian zawyża, a Huber zaniża objętość.

## Literatura

---

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysiński, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [F2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. II, PWN, Warszawa 2005.
- [FK] F. Krzysik, *Nauka o drewnie*, PWN, Warszawa 1974.
- [HRW1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.