

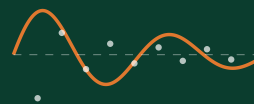
Streszczenie wykładu 5

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Iloraz różnicowy • pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacja geometryczna • reguły obliczania pochodnych • pochodne funkcji elementarnych • pochodna funkcji złożonej i odwrotnej • różniczka

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Iloraz różnicowy i pochodna w punkcie

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją określoną na przedziale (a, b) zawierającym punkt x_0 . Oznaczamy: $\Delta x = x - x_0$ – **przyrost argumentu**, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – **przyrost wartości funkcji**.

Definicja (iloraz różnicowy)

Ilorazem różnicowym funkcji $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ odpowiadającym przyrostowi $\Delta x \neq 0$ argumentu x_0 (gdzie $x_0 + \Delta x \in (a, b)$) nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

[GS, Pochodne funkcji]

Definicja (pochodna funkcji w punkcie)

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego, gdy przyrost argumentu dąży do zera:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Równoważnie: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Jeżeli granica nie istnieje, funkcja nie ma pochodnej w x_0 .

[GS, Pochodne funkcji]

Twierdzenie (interpretacja geometryczna)

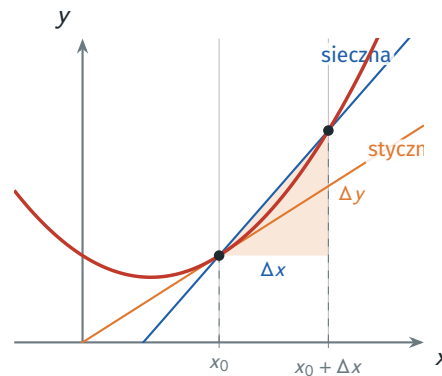
Iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$ jest współczynnikiem kierunkowym **siecznej**. Gdy $\Delta x \rightarrow 0$, sieczna przechodzi w **styczną** i

$$f'(x_0) = \tan \alpha_0,$$

gdzie α_0 – kąt nachylenia stycznej do osi Ox .
Równanie stycznej:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

 [F1, Pochodne i różniczki]



Rys. 1. Sieczna i styczna do wykresu w punkcie x_0 .

Oznaczenia pochodnej

$f'(x)$, y' (Lagrange) $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ (Leibniz) $Df(x)$, Dy (Cauchy). Jeżeli funkcja ma pochodną w każdym punkcie przedziału, to funkcję $x \mapsto f'(x)$ nazywamy **pochodną funkcji f** .

Przykład 1

Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ (w punkcie x i w punkcie $x_0 = 2$).

Rozwiązanie. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, zatem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = \boxed{2x}, \text{ a } f'(2) = \boxed{4}.$$

Przykład 2

Wykaż, że funkcja $y = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie. $\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$ dla $\Delta x > 0$ oraz -1 dla $\Delta x < 0$. Granice jednostronne (1 i -1) są różne, więc granica nie istnieje – funkcja nie ma pochodnej w 0 (wykres ma „ostrze”).

2 Reguły obliczania pochodnych

Twierdzenie (reguły obliczania pochodnych)

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne, to:

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g' & (a \cdot f)' &= a \cdot f', \quad a \in \mathbb{R} \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad g \neq 0\end{aligned}$$

[GS, Pochodne funkcji]

Pochodne funkcji elementarnych

$$\begin{aligned}(c)' &= 0 & (x)' &= 1 & (x^k)' &= k x^{k-1} \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (e^x)' &= e^x & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) & (\arctg x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}\end{aligned}$$

[GS, Pochodne funkcji]

Przykład 3

Oblicz pochodne: a) $y = 3x^2 - 2x + 5$, b) $y = (2x^3 - 3)(2x + 1)$, c) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Rozwiązanie.

a) $y' = 3(x^2)' - 2(x)' + (5)' = 3 \cdot 2x - 2 + 0 = 6x - 2$.

b) $y' = (2x^3 - 3)'(2x + 1) + (2x^3 - 3)(2x + 1)' = 6x^2(2x + 1) + 2(2x^3 - 3) = 16x^3 + 6x^2 - 6$.

c) $y' = \frac{3x^2(x-1) - (x^3-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{(x-1)^2} = 2x+1$.

Inaczej: $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$, więc $y' = 2x + 1$.

3 Pochodna funkcji złożonej i odwrotnej

Twierdzenie (pochodna funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne, to

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

– pochodna funkcji zewnętrznej (obliczona w punkcie $g(x)$) razy pochodna funkcji wewnętrznej.

 [GS, Pochodne funkcji]

Przykład 4

a) $y = (3x^2 + 1)^2$: $y' = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x = 12x(3x^2 + 1)$; b) $y = 4(2x^2 + x - 1)^2$:
 $y' = 4 \cdot 2(2x^2 + x - 1)(4x + 1) = 8(2x^2 + x - 1)(4x + 1)$.

Twierdzenie (pochodna funkcji odwrotnej)

Pochodna funkcji odwrotnej jest odwrotnością pochodnej funkcji danej: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, $x'_y \neq 0$.

 [F1, Pochodne i różniczki]

Przykład 5

Wyprowadź wzór na pochodną funkcji $y = \ln x$.

Rozwiązanie. Funkcja $y = \ln x$ jest odwrotna do $x = e^y$, a $\frac{dx}{dy} = e^y = x$. Zatem $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Analogicznie $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

4 Różniczka funkcji

Dla małych przyrostów Δx iloraz różnicowy niewiele różni się od pochodnej, więc

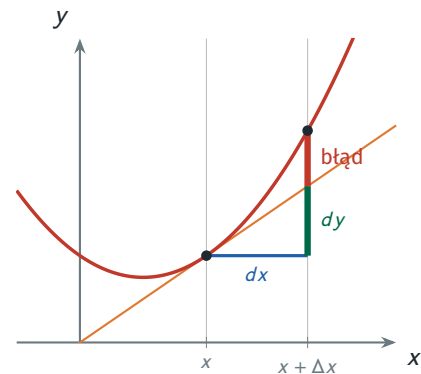
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x.$$

Definicja (różniczka)

Różniczką funkcji nazywamy iloczyn pochodnej tej funkcji przez przyrost $dx \neq 0$ zmiennej niezależnej:

$$dy = f'(x) dx.$$

[F1, Pochodne i różniczki]



Rys. 2. Różniczka dy i przyrost $\Delta y = dy + \text{błąd}$.

Stąd $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ (oznaczenie Leibniza). Funkcję, która ma pochodną, nazywamy **różniczkowalną**.

★ Zapamiętaj

- ▶ $f'(x_0)$ to granica ilorazu różnicowego = współczynnik kierunkowy stycznej.
- ▶ Pochodną iloczynu i ilorazu liczymy według odpowiednich wzorów – **nie** jest to iloczyn ani iloraz pochodnych.
- ▶ Pochodna funkcji złożonej: „pochodna zewnętrznej $\times$ pochodna wewnętrznej”.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.