MATEMATYKA • Ochrona Środowiska• materiały do pracy samodzielnej

Streszczenie wykładu 6

Całka oznaczona i jej zastosowania

Suma całkowa Riemanna • całka oznaczona • twierdzenie Newtona–Leibniza • własności • podstawienie i całkowanie przez części • pole obszaru • zastosowania w ochronie środowiska

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka
Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

1 Całka oznaczona Riemanna

Definicja (suma całkowa)

Niech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – dowolnymi punktami pośrednimi. Sumę

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

nazywamy **sumą całkową Riemanna**. Ciąg podziałów jest **normalny**, gdy $\max_i \Delta x_i \to 0$.

[F2, Całka oznaczona]

Definicja (całka oznaczona)

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów i dowolnego wyboru punktów pośrednich ciąg (S_n) ma tę samą granicę właściwą, to granicę tę nazywamy **całką oznaczoną** funkcji f na $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

a – dolna, b – górna granica całkowania. Całka oznaczona jest **liczbą**.

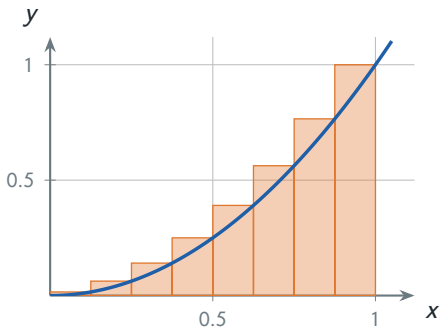
[F2, Całka oznaczona]

Twierdzenie (całkowalność)

Funkcja ciągła na $[a, b]$ jest na nim całkowalna. Całkowalna jest też funkcja ograniczona o skończenie wielu punktach nieciągłości.

[GS, Całki oznaczone]

Interpretacja geometryczna. Dla $f \geq 0$ całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest polem obszaru pod wykresem f nad przedziałem $[a, b]$. [GS, Zastosowania całek oznaczonych]



Rys. 1. Suma Riemanna dla $f(x) = x^2$, $n = 8$: $S_8 \approx 0{,}398$; $S_n \to \frac{1}{3}$.

2 Twierdzenie Newtona–Leibniza i własności

Twierdzenie (Newtona–Leibniza)

Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, a F jest dowolną jej funkcją pierwotną, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

[GS, Całki oznaczone]

Przykład 1

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 1+1 = 2$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^e = 1 \qquad \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \Big[x^3 - x^2 + x\Big]_{-1}^2 = 6 - (-3) = 9$$

Twierdzenie (własności całki oznaczonej)

liniowość: $\displaystyle\int_a^b \big[\alpha f(x) \pm \beta g(x)\big]dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$

addytywność: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ \ a < c < b$

zamiana granic: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$

monotoniczność: $f \le g$ na $[a,b] \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

symetria: f nieparzysta: $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$; $\quad f$ parzysta: $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

[GS, Całki oznaczone]

Twierdzenie (o wartości średniej)

Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to istnieje $c \in [a,b]$ takie, że $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$. Liczbę $f_{\text{śr}} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy **wartością średnią** funkcji f na $[a,b]$.

[GS, Całki oznaczone]

3 Metody obliczania całek oznaczonych

Podstawienie i całkowanie przez części

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt, \qquad \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

[GS, Całki oznaczone]

★ Zapamiętaj

Przy podstawieniu w całce oznaczonej **zmieniamy granice całkowania** (z x na t) – nie wracamy do zmiennej x.

Przykład 2

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = x^2, & dt = 2x\,dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^t\,dt = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}dx = \left| \begin{array}{ll} f = x & g' = \mathrm{e}^{-x} \\ f' = 1 & g = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| = \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-1} + \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$$

4 Zastosowania geometryczne

Pole obszaru

- pole pod wykresem: $P = \int_a^b |f(x)|\,dx$ (gdy f zmienia znak – dzielimy przedział w miejscach zerowych),
- pole między krzywymi ($f \le g$ na $[a,b]$): $P = \int_a^b \big[g(x) - f(x)\big]dx$,

[GS, Zastosowania całek oznaczonych]

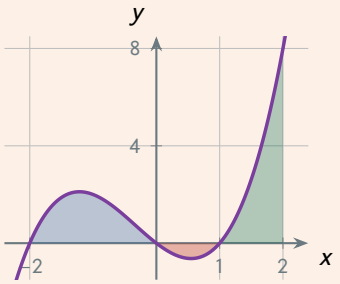
Przykład 3 – funkcja zmieniająca znak

Pole obszaru między krzywą $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ a osią Ox dla $x \in [-2, 2]$.

Rozwiązanie. $f(x) = x(x-1)(x+2)$, miejsca zerowe -2, 0, 1; $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$.

$$P = \int_{-2}^0 f\,dx - \int_0^1 f\,dx + \int_1^2 f\,dx = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \boxed{\frac{37}{6}}$$

Uwaga: $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = \frac{16}{3} \neq P$.



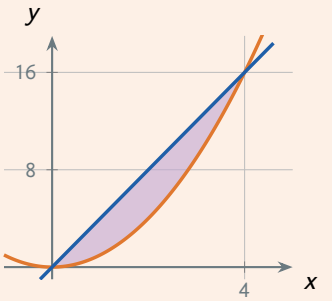
Rys. 2. Pole pod osią liczymy z minusem.

Przykład 4 – pole między krzywymi

Pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$ i $y = 4x$.

Rozwiązanie. Punkty przecięcia: $x^2 = 4x \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$. Na $[0,4]$ mamy $4x \ge x^2$, więc

$$P = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$$



Rys. 3. Obszar między $y = 4x$ i $y = x^2$.

5 Zastosowania w ochronie środowiska

★ Zapamiętaj

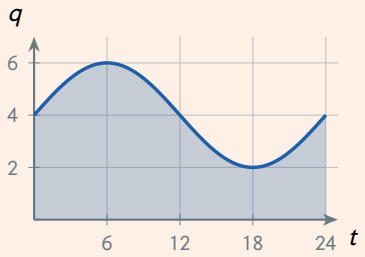
Jeżeli $q(t)$ jest **natężeniem** procesu (ładunek zanieczyszczeń [kg/h], intensywność opadu [mm/h], emisja [t/rok]), to wielkość całkowita w przedziale $\langle t_1, t_2\rangle$ wynosi $Q = \int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$ – jest to pole pod wykresem natężenia. Średnia wartość wielkości $c(t)$ w okresie $\langle a, b\rangle$: $c_{\text{śr}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b c(t)\,dt$.

Przykład 5 – ładunek azotu

Ładunek azotu z oczyszczalni: $q(t) = 4+2\sin\frac{\pi t}{12}$ [kg/h], $t \in \langle 0;24\rangle$. W ciągu doby:

$$Q = \int_0^{24}\left(4+2\sin\frac{\pi t}{12}\right)dt = \left[4t - \frac{24}{\pi}\cos\frac{\pi t}{12}\right]_0^{24}$$

$$= \boxed{96\ \text{kg}}.$$



Rys. 4. Ładunek = pole pod wykresem natężenia.

Przykład 6 – średnie stężenie PM10

$c(t) = 30 + 0{,}2t(24-t)$ [μg/m^3], $t \in \langle 0;24\rangle$:
$c_{\text{śr}} = \frac{1}{24}\int_0^{24}(30+4{,}8t-0{,}2t^2)dt = \frac{1180{,}8}{24} = \boxed{49{,}2\ \mu\text{g/m}^3}$ – poniżej normy dobowej 50 μg/m^3.

Przykład 7 – suma opadu

Intensywność opadu $i(t) = 6te^{-t}$ [mm/h]; przez części $\int te^{-t}dt = -(t+1)e^{-t}+C$, więc w ciągu 4 h: $P = 6\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^4 = 6(1-5e^{-4}) \approx 5{,}45$ mm.

Literatura

[F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.

[KW1] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.

[GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

[F2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. II, PWN, Warszawa 2005.

Znacznik [**klucz**, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.