

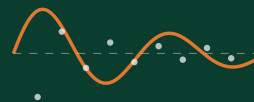
Streszczenie wykładu 6

Pochodna – interpretacja geometryczna i fizyczna, zastosowania

Przykłady obliczania pochodnych • pochodne funkcji cyklometrycznych • równanie stycznej • prędkość jako pochodna • obliczenia przybliżone za pomocą różniczki • zastosowania w ekoenergetyce

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Obliczanie pochodnych – przykłady

Przykład 1

Wyznacz pochodną funkcji $y = 2\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x^3}}{3} + \frac{\sqrt{4x}}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$.

Rozwiązanie. Zapisujemy składniki jako potęgi: $y = 2x^{1/3} - \frac{1}{3}x + 2x^{-3/2} + x^{-1} + 1$. Ze wzoru $(x^n)' = nx^{n-1}$:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} - x^{-2} = \frac{2}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{3} - 3x^{-5/2} - x^{-2}.$$

Przykład 2

Wyznacz pochodne: a) $y = \frac{2}{3} \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$, b) $y = \frac{e^x}{2 + \ln x}$.

Rozwiązanie.

a) $y' = \frac{2}{3} \left[(-\sin x) \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \right] = -\frac{2}{3} \cos x - \frac{2}{3} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, bo $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x$.

b) $y' = \frac{e^x(2 + \ln x) - e^x \cdot \frac{1}{x}}{(2 + \ln x)^2}$.

Przykład 3 – funkcje złożone

$f(x) = \sqrt{\ln x}$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$: $f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$

$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos(x^2)}$: $f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x \cos(x^2) + 2x \sin^2 x \sin(x^2)}{\cos^2(x^2)}$

1.1 Pochodne funkcji cyklometrycznych

Funkcja cyklometryczna jest odwrotna do trygonometrycznej, więc korzystamy ze wzoru $y'_x = 1/x'_y$. Dla $y = \arcsin x$ mamy $x = \sin y$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\frac{dx}{dy} = \cos y > 0$, stąd

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pochodne funkcji cyklometrycznych

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

[GS, Pochodne funkcji]

2 Interpretacja geometryczna – styczna

Twierdzenie (równanie stycznej)

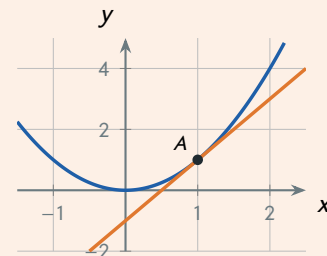
Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

[GS, Pochodne funkcji]

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do paraboli $f(x) = x^2$ w punkcie $A(1; 1)$.

Rozwiązanie. Prosta przez A: $y - 1 = a(x - 1)$; dla stycznej $a = f'(1)$. Ponieważ $f'(x) = 2x$, mamy $f'(1) = 2$. Zatem $y - 1 = 2(x - 1)$, czyli $y = 2x - 1$.



3 Interpretacja fizyczna – prędkość

Jeżeli t oznacza czas, a $s = f(t)$ – drogę przebytą od początku ruchu do chwili t , to iloraz różnicowy $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ jest **prędkością średnią** w przedziale czasu od t do $t + \Delta t$.

Definicja (prędkość chwilowa)

Prędkością chwilową w chwili t nazywamy granicę

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

[HRW, Ruch prostoliniowy]

Przykład 5

Ciało porusza się zgodnie z równaniem $s(t) = \frac{1}{2}t^2$ [m]. Wyznacz prędkość średnią w przedziale $\langle 2; 2 + \Delta t \rangle$ oraz prędkość chwilową w chwili $t = 2$ s.

Rozwiązanie. $v_{\text{sr}} = \frac{\frac{1}{2}(2 + \Delta t)^2 - 2}{\Delta t} = 2 + \frac{\Delta t}{2}$ (np. dla $\Delta t = 1$ s: 2,5 m/s). Prędkość chwilowa:

$v(t) = s'(t) = t$, więc $v(2) = 2$ m/s.

4 Różniczka – obliczenia przybliżone

Twierdzenie (przybliżenie liniowe)

Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to dla małych Δx : $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$.

[F1, Pochodne i różniczki]

Przykład 6

Korzystając z różniczki, oblicz przybliżoną wartość $\sqrt[3]{63}$.

Rozwiązanie. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x_0 = 64$, $\Delta x = -1$. Wtedy

$$\sqrt[3]{63} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot (-1) = 4 - \frac{1}{48} \approx 3,9792$$

(wartość dokładna: 3,97905...).

5 Zastosowania w ekoenergetyce

Pochodna $f'(x)$ opisuje **szybkość zmian** wielkości $y = f(x)$; jej jednostka to jednostka y podzielona przez jednostkę x (np. droga $\rightarrow$ prędkość [m/s], energia $\rightarrow$ moc [kW]).

Definicja (moc)

Moc jest szybkością przekazywania energii (wykonywania pracy):

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

[HRW, Praca i energia kinetyczna]

Przykład 7 – instalacja fotowoltaiczna

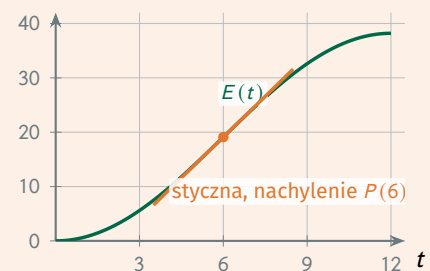
W uproszczonym modelu energia wytworzona przez instalację PV od wschodu słońca do chwili t [h] wynosi $E(t) = \frac{60}{\pi} (1 - \cos \frac{\pi t}{12})$ [kWh], $t \in \langle 0, 12 \rangle$. Wyznacz moc $P(t)$.

Rozwiązanie. Z reguły dla funkcji złożonej:

$$P(t) = E'(t) = \frac{60}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi t}{12} \cdot \frac{\pi}{12} = 5 \sin \frac{\pi t}{12} \text{ kW}.$$

Moc jest największa dla $t = 6$ (południe): $P_{\max} = 5$ kW.

Energia dzienna: $E(12) = \frac{120}{\pi} \approx 38,2$ kWh.



Rys. 1. $E(t)$; nachylenie stycznej to moc $P(t)$.

Moc turbiny wiatrowej

$$P = \frac{1}{2} \rho A c_p v^3, \quad \frac{dP}{dv} = \frac{3}{2} \rho A c_p v^2, \quad \frac{dP}{P} = 3 \frac{dv}{v},$$

gdzie ρ – gęstość powietrza, A – pole powierzchni zakreślonej przez wirnik, c_p – współczynnik mocy ($c_p < \frac{16}{27}$), v – prędkość wiatru. Wzrost prędkości wiatru o 1% daje wzrost mocy o około 3%.

[DB, rozdz. 24]

Przykład 8 – turbina wiatrowa

Turbina: $D = 80$ m, $c_p = 0,4$, $\rho = 1,225$ kg/m³; wiatr wzrasta z 8 do 8,5 m/s. Oszacuj przyrost mocy.

Rozwiązanie. $\frac{1}{2} \rho A c_p \approx 1231,5$ kg/m, $P(8) \approx 630,5$ kW, $P'(8) = 3 \cdot 1231,5 \cdot 64 \approx 236,4$ kW/(m/s).

Stąd $dP = 236,4 \cdot 0,5 \approx 118$ kW (dokładnie: $\Delta P \approx 125,8$ kW).

Sprawność ogniwa PV a temperatura

$$\eta = \eta_{\text{ref}} [1 - \beta_{\text{ref}} (T_c - T_{\text{ref}})],$$

gdzie T_c – temperatura ogniwa, T_{ref} – temperatura odniesienia (zwykle 25°C), β_{ref} – współczynnik temperaturowy.

[DB, rozdz. 23]

Przykład 9 – moduł PV

Moduł 400 W (przy 25°C), $\beta_{\text{ref}} = 0,0045 \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $P(T) = 400[1 - 0,0045(T - 25)]$. Oblicz $P'(T)$ i $P(55)$.

Rozwiązanie. $P'(T) = 400 \cdot (-0,0045) = -1,8 \text{ W/}^\circ\text{C}$ – każdy stopień więcej to 1,8 W mniej.

$$P(55) = 400 \cdot 0,865 = 346 \text{ W}.$$

Uwaga

Modele i dane liczbowe w przykładach 7–9 są uproszczone i służą ilustracji pojęcia pochodnej.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysiński, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.
- [DB] J. A. Duffie, W. A. Beckman, *Solar Engineering of Thermal Processes*, 4th ed., Wiley, Hoboken 2013.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.