

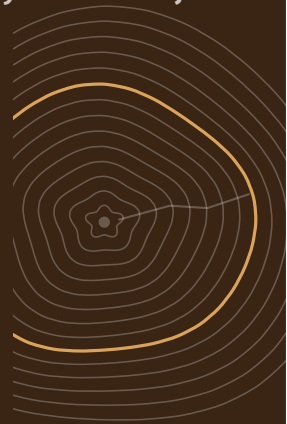
## Streszczenie wykładów 7–8

# Wektory i macierze

Blok IV (28.11.2026) • wektory w  $\mathbb{R}^n$ , współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$  • działania na wektorach, wersory • norma, odległość punktów • iloczyn skalarny, kąt, prostokąt • macierze i ich rodzaje, transpozycja, ślad • dodawanie i mnożenie macierzy, równania macierzowe • zastosowania w technologii drewna

**Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka**

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



## 1 Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

### Definicja (wektor w $\mathbb{R}^n$ )

**Wektorem**  $n$ -wymiarowym nazywamy uporządkowany układ  $n$  liczb rzeczywistych  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Liczby  $a_1, \dots, a_n$  nazywamy **współrzednymi** (składowymi) wektora. Zbiór wszystkich wektorów  $n$ -wymiarowych oznaczamy  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{R}^n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n] : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

[MS, Przestrzenie liniowe]

### Definicja (przestrzeń wektorowa)

Zbiór  $\mathbb{R}^n$  z działaniem dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby rzeczywiste nazywamy  $n$ -wymiarową rzeczywistą **przestrzenią wektorową**.

[MS, Przestrzenie liniowe]

Dla  $n = 2$  wektory można przedstawić na płaszczyźnie, dla  $n = 3$  – w przestrzeni. Dla  $n > 3$  wektora nie da się narysować, ale wszystkie działania wykonuje się identycznie. W technologii drewna wektorem jest np. siła ciągnąca kłodę (dwie lub trzy składowe), zestaw wyników pomiaru wilgotności kilku próbek z jednej partii tarcicy albo zestaw ilości materiałów potrzebnych do wykonania mebla.

### Definicja (wektor zaczepiony)

**Wektor**  $\overrightarrow{AB}$  to uporządkowana para punktów: punkt  $A$  jest **początkiem** (punktem zaczepienia), punkt  $B$  – **końcem** wektora. Wektor ma **kierunek** (prosta, na której leży), **zwrot** (od  $A$  do  $B$ ) i **długość**. Wektory o tej samej długości, kierunku i zwrocie uważamy za równe; zbiór takich wektorów to **wektor swobodny**.

[HRW1, Wektory]

## Współrzędne wektora

$$\mathbb{R}^2: A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$$

$$\mathbb{R}^3: A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3]$$

$$\mathbb{R}^n: A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow \vec{AB} = [b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n]$$

Współrzędne wektora to różnice współrzędnych **końca** i **początku**.

[MS, Wektory]

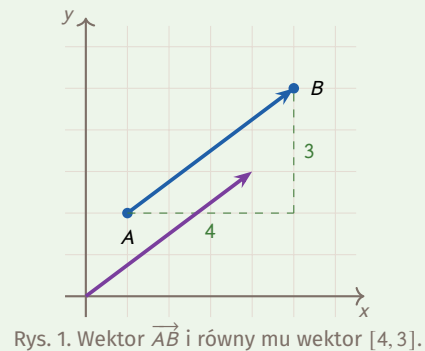
## Przykład 1

Wyznacz współrzędne wektora  $\vec{AB}$ , jeżeli  $A = (1, 2)$ ,  $B = (5, 5)$ .

**Rozwiązanie.**  $\vec{AB} = [5 - 1, 5 - 2] = [4, 3]$ .

Wektor  $[4, 3]$  zaczepiony w początku układu współrzędnych jest równy wektorowi  $\vec{AB}$  (Rys. 1).

Dla  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (3, 2, 3)$ :  $\vec{AB} = [3 - 1, 2 - 0, 3 - 2] = [2, 2, 1]$ .



Rys. 1. Wektor  $\vec{AB}$  i równy mu wektor  $[4, 3]$ .

## Definicja (wektor kolumnowy i wierszowy, transpozycja)

Wektor można zapisać **w kolumnie** (wektor kolumnowy) lub **w wierszu** (wektor wierszowy). Zamianę jednego zapisu na drugi nazywamy **transpozycją** i oznaczamy symbolem  $^T$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3], \quad \mathbf{b} = [d \ e \ f] \Rightarrow \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}.$$

[MS, Macierze]

## Przykład 2 – wektory pomiarów

Wymiary nominalne listwy (grubość, szerokość, długość w mm):  $\mathbf{x} = [20, 45, 1200]^T$  – wektor z  $\mathbb{R}^3$ . Wilgotności [%] pięciu próbek pobranych z jednej partii tarcicy:

$\mathbf{w} = [12,4; 11,8; 13,1; 12,0; 12,7]$  – wektor z  $\mathbb{R}^5$  (wartości przykładowe). Kolejność współrzędnych ma znaczenie: trzeba pamiętać, co oznacza każda z nich.

## 2 Działania na wektorach

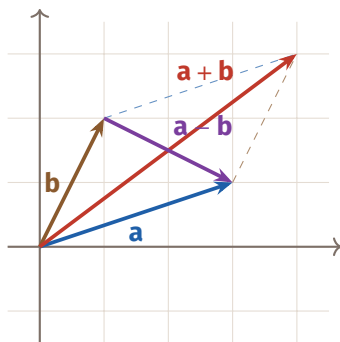
### Definicja (działania na wektorach)

Niech  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$  oraz  $k \in \mathbb{R}$ .

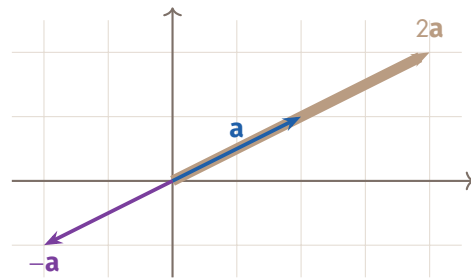
- **Suma:**  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]$ .
- **Różnica:**  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n]$ .
- **Iloczyn wektora przez liczbę:**  $k\mathbf{a} = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n]$ .
- **Wektor zerowy:**  $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]$ ; **wektor przeciwny:**  $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} = [-a_1, \dots, -a_n]$ .

Działania wykonujemy **po współrzędnych**. Dodawać i odejmować można tylko wektory o tej samej liczbie współrzędnych.

[MS, Wektory]



Rys. 2. Reguła równoległoboku:  $\mathbf{a} = [3, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 2]$ .



Rys. 3. Mnożenie wektora  $\mathbf{a} = [2, 1]$  przez liczbę.

Geometrycznie sumę  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  wyznacza przekątna równoległoboku zbudowanego na wektorach  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  (lub „łańcuszek”: początek  $\mathbf{b}$  w końcu  $\mathbf{a}$ ). Różnica  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  to wektor od końca  $\mathbf{b}$  do końca  $\mathbf{a}$ . Mnożenie przez  $k > 0$  zmienia długość  $k$  razy i zachowuje zwrot; mnożenie przez  $k < 0$  zmienia zwrot na przeciwny.

### Własności działań na wektorach

Dla dowolnych  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  oraz  $k, l \in \mathbb{R}$ :

- |                                                                                      |                |                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------|
| 1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$                               | (przemienność) | 5. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ |
| 2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | (łączność)     | 6. $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$          |
| 3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$                                            |                | 7. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$                        |
| 4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$                                         |                | 8. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$                        |

[MS, Przestrzenie liniowe]

### Przykład 3

Dla  $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$  i  $\mathbf{b} = [1, 4, -2]$  oblicz  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ .

**Rozwiązanie.**  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [2 + 1, -1 + 4, 3 - 2] = [3, 3, 1]$ ;  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [2 - 1, -1 - 4, 3 + 2] = [1, -5, 5]$ ;  
 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = [6, -3, 9] - [2, 8, -4] = [4, -11, 13]$ .

#### Przykład 4 – stan magazynu stolarni

Stan magazynu (płyta [m<sup>2</sup>], obrzeże [m], okucia [szt.]) w poniedziałek wynosi  $\mathbf{s} = [40, 250, 600]$ . Przychodzi dostawa  $\mathbf{d} = [60, 150, 400]$ , a tygodniowe zużycie to  $\mathbf{z} = [35, 120, 300]$  (wartości przykładowe). Stan po dostawie i dwóch tygodniach pracy:

$$\mathbf{s} + \mathbf{d} - 2\mathbf{z} = [100, 400, 1000] - [70, 240, 600] = [30, 160, 400].$$

#### Definicja (kombinacja liniowa)

**Kombinacją liniową** wektorów  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$  nazywamy każdy wektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  postaci

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

 [MS, Przestrzenie liniowe]

#### Definicja (wersor)

**Wersorem** nazywamy wektor, którego długość jest równa 1. **Wersory osi** układu współrzędnych: w  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{i} = [1, 0]$ ,  $\mathbf{j} = [0, 1]$ ; w  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{j} = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$ .

 [MS, Wektory]

#### Twierdzenie

Każdy wektor można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wersorów osi:

$$[a_1, a_2] = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}, \quad [a_1, a_2, a_3] = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}.$$

 [MS, Wektory]

#### Przykład 5

$$\mathbf{u} = [7, -3] = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}; \quad \mathbf{w} = [2, 0, -5] = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}; \quad 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = [4, 1, -1].$$

### 3 Norma (długość) wektora

#### Definicja (norma wektora)

**Normą** (długością) wektora  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  nazywamy liczbę

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

W  $\mathbb{R}^2$  jest to twierdzenie Pitagorasa:  $\|[3, 4]\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

[MS, Iloczyn skalarny]

#### Własności normy

1.  $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ , przy czym  $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\|k\mathbf{a}\| = |k| \|\mathbf{a}\|$ ;
3.  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$  (nierówność trójkąta).

[MS, Iloczyn skalarny]

#### Odległość punktów, wersor kierunku

Odległość punktów  $A$  i  $B$ :  $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$ .

Dla  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  wektor  $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a}$  jest wersorem o tym samym kierunku i zwrocie co  $\mathbf{a}$ .

[MS, Wektory]

#### Przykład 6

a)  $\mathbf{a} = [3, 4]$ :  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ ,  $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{5} [3, 4] = [0,6; 0,8]$ .

b)  $\mathbf{b} = [2, -1, 2]$ :  $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ ,  $\mathbf{b}^0 = [\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ .

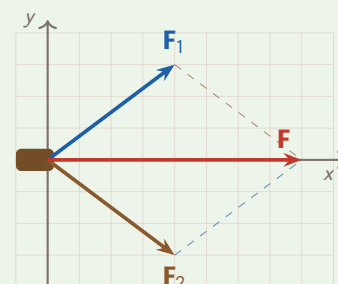
c)  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (3, 2, 3)$ :  $\overrightarrow{AB} = [2, 2, 1]$ ,  $d(A, B) = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ .

#### Przykład 7 – wypadkowa sił przy przeciąganiu kłody

Kłodę przeciągają dwie liny. Siły w niutonach (oś  $x$  – kierunek przeciągania, oś  $y$  – kierunek poprzeczny):  $\mathbf{F}_1 = [400, 300]$ ,  $\mathbf{F}_2 = [400, -300]$ . Siła wypadkowa jest sumą wektorów sił. [HRW1, Wektory]

**Rozwiązanie.**  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = [800, 0]$  N,  $\|\mathbf{F}\| = 800$  N.

Każda z lin ciągnie siłą  $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\| = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500$  N, ale wypadkowa nie wynosi 1000 N: długości wektorów się nie dodają ( $800 < 500 + 500$  – nierówność trójkąta). Składowe poprzeczne  $\pm 300$  N znoszą się.



Rys. 4. Siły [100 N] działające na kłodę.

## 4 Iloczyn skalarny

### Definicja (iloczyn skalarny)

**Iloczynem skalarnym** wektorów  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$  i  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$  nazywamy **liczbę**

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Spotykane są też oznaczenia:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ,  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ .

[MS, Iloczyn skalarny]

### Twierdzenie (własności iloczynu skalarnego)

Dla dowolnych  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  i  $k \in \mathbb{R}$ :

1.  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ ; 2.  $\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$ ; 3.  $(k\mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$ ; 4.  $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$ ,  
 $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Wynika stąd np. „wzór skróconego mnożenia”:  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$ .

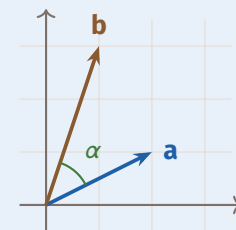
[MS, Iloczyn skalarny]

### Twierdzenie (interpretacja geometryczna)

Jeżeli  $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$  jest kątem między niezerowymi wektorami  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$ , to

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha, \quad \text{czyli} \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Zatem:  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} > 0$  – kąt ostry,  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} < 0$  – kąt rozwarty,  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$  – kąt prosty.



[MS, Iloczyn skalarny]

### Twierdzenie (warunek prostokątności)

Niezerowe wektory  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  są **prostokątne (ortogonalne)**, co zapisujemy  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$  (bo  $\cos 90^\circ = 0$ ).

[MS, Iloczyn skalarny]

### Przykład 8

Oblicz iloczyn skalarny i kąt między wektorami  $\mathbf{a} = [2, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 3]$ .

**Rozwiązanie.**  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$ ,  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$ ,  $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{10}$ ,

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

### Przykład 9

a)  $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 4, 2]$ :  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 2 - 4 + 6 = 4 > 0$  – kąt ostry.

b)  $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$ ,  $\mathbf{v} = [2, 1, 2]$ :  $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = 2 + 2 - 4 = 0$  – wektory są prostokątne.

c) Dla jakiego  $m$  wektory  $[m, 2, 1]$  i  $[3, -1, m]$  są prostokątne?  $3m - 2 + m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ .

**Definicja (praca stałej siły)**

Praca, jaką wykonuje stała siła  $\mathbf{F}$  na przemieszczeniu  $\mathbf{s}$ , jest iloczynem skalarnym:

$$W = \mathbf{F} \circ \mathbf{s} = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{s}\| \cos \alpha \quad [J = N \cdot m],$$

gdzie  $\alpha$  – kąt między kierunkiem siły a kierunkiem przemieszczenia. Pracę wykonuje tylko składowa siły wzdłuż przemieszczenia.

 [HRW1, Energia kinetyczna i praca]

**Przykład 10 – praca przy przeciąganiu kłody**

Ciągnik przeciąga kłodę po prostej na odległość 25 m; lina jest skierowana skośnie w górę i działa siłą  $\mathbf{F} = [400, 300]$  N, przemieszczenie  $\mathbf{s} = [25, 0]$  m.

**Rozwiązanie.**  $W = \mathbf{F} \circ \mathbf{s} = 400 \cdot 25 + 300 \cdot 0 = 10\,000 \text{ J} = 10 \text{ kJ}$ . Kąt nachylenia liny:  
 $\cos \alpha = \frac{W}{\|\mathbf{F}\| \|\mathbf{s}\|} = \frac{10\,000}{500 \cdot 25} = 0,8$ ,  $\alpha \approx 36,9^\circ$ . Składowa pionowa siły (300 N) nie wykonuje pracy.

**Przykład 11 – koszt materiałów na szafkę**

Na wykonanie szafki potrzeba  $\mathbf{q} = [2,5; 8; 12]$  ( $\text{m}^2$  płyty, m obrzeża, szt. okuć), a ceny jednostkowe wynoszą  $\mathbf{c} = [60; 3; 4]$  (zł/ $\text{m}^2$ , zł/m, zł/szt., wartości przykładowe). Koszt materiałów to suma iloczynów „ilość  $\times$  cena”, czyli iloczyn skalarny:

$$K = \mathbf{q} \circ \mathbf{c} = 2,5 \cdot 60 + 8 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 150 + 24 + 48 = 222 \text{ zł}.$$

**★ Zapamiętaj**

$\overrightarrow{AB}$  = „koniec minus początek”; działania  $+$ ,  $-$ ,  $k \cdot$  wykonujemy po współrzędnych;

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}; \quad \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \sum a_i b_i \text{ (wynik jest liczbą); } \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|};$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0.$$

## 5 Macierze i ich rodzaje

### Definicja (macierz)

**Macierzą** wymiaru  $m \times n$  nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych ustawionych w  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Liczbę  $a_{ij}$  nazywamy **elementem** macierzy; pierwszy indeks ( $i$ ) oznacza numer **wiersza**, drugi ( $j$ ) – numer **kolumny**. Każdy wiersz macierzy jest wektorem wierszowym (macierzą  $1 \times n$ ), każda kolumna – wektorem kolumnowym (macierzą  $m \times 1$ ).

 [MS, Macierze]

### Przykład 12 – macierz norm zużycia

Normy zużycia materiałów na jeden wyrób (wartości przykładowe): wiersze – płyta [ $m^2$ ], obrzeże [ $m$ ], okucia [szt.]; kolumny – stół, szafka, regał:

$$N = \begin{bmatrix} 1,2 & 2,5 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Macierz ma wymiar  $3 \times 3$ ;  $n_{32} = 12$  to liczba okuć w szafce; druga kolumna  $[2,5; 8; 12]^T$  to wektor  $\mathbf{q}$  z przykładu 11.

### Definicja (rodzaje macierzy)

- ▶ **Macierz zerowa**  $0_{m \times n}$ : wszystkie elementy są równe zero,  $a_{ij} = 0$ .
- ▶ **Macierz kwadratowa** stopnia  $n$ : liczba wierszy równa liczbie kolumn ( $m = n$ ). Elementy  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  tworzą **przekątną główną**.
- ▶ **Macierz górnotrójkątna**: macierz kwadratowa, w której  $a_{ij} = 0$  dla  $i > j$  (pod przekątną same zera).
- ▶ **Macierz dolnotrójkątna**: macierz kwadratowa, w której  $a_{ij} = 0$  dla  $i < j$  (nad przekątną same zera).
- ▶ **Macierz diagonalna**: macierz kwadratowa, w której  $a_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$  (niezerowe elementy mogą być tylko na przekątnej).
- ▶ **Macierz jednostkowa**  $I_n$ : macierz diagonalna, której wszystkie elementy przekątnej są równe 1.
- ▶ **Macierz symetryczna**: macierz kwadratowa, w której  $a_{ij} = a_{ji}$  dla wszystkich  $i, j$ .

 [MS, Macierze]

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 12 & 30 \\ 12 & 0 & 25 \\ 30 & 25 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{zerowa } 2 \times 3 & \text{górnótrójkątna} & \text{dolnótrójkątna} & \text{diagonalna} & \text{jednostkowa } I_3 & \text{symetryczna} \end{matrix}$$

Ostatnia macierz to przykładowa macierz odległości [km] między tartakiem, składem drewna i zakładem meblarskim – odległość z  $A$  do  $B$  jest równa odległości z  $B$  do  $A$ , więc macierz jest symetryczna.

#### Definicja (macierz transponowana)

**Macierzą transponowaną** do macierzy  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  nazywamy macierz  $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ , powstałą przez zamianę wierszy na kolumny (pierwszy wiersz  $A$  staje się pierwszą kolumną  $A^T$  itd.).

 [MS, Macierze]

#### Przykład 13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad (A^T)^T = A; \quad A \text{ symetryczna} \iff A^T = A.$$

#### Definicja (śląd macierzy)

**Śładem** macierzy kwadratowej  $A$  nazywamy sumę elementów jej przekątnej głównej:

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

 [MS, Macierze]

#### Przykład 14

$$\text{tr} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 + (-3) + 2 = \boxed{3}; \quad \text{tr } I_n = n.$$

## 6 Dodawanie macierzy i mnożenie przez liczbę

### Definicja (równość, suma, różnica, iloczyn przez liczbę)

Niech  $A = [a_{ij}]$  i  $B = [b_{ij}]$  będą macierzami **tego samego wymiaru**  $m \times n$  oraz  $c \in \mathbb{R}$ .

- ▶  $A = B$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_{ij} = b_{ij}$  dla wszystkich  $i, j$ .
- ▶ **Sumą** macierzy nazywamy macierz  $C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ .
- ▶ **Różnicą** macierzy nazywamy macierz  $C = A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$ .
- ▶ **Iloczynem macierzy przez liczbę**  $c$  nazywamy macierz  $cA = [c a_{ij}]_{m \times n}$ .

Dodawać i odejmować można tylko macierze tego samego wymiaru; działania wykonujemy „element po elemencie”.

 [MS, Działania na macierzach]

### Przykład 15

Dla  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 & 2+(-1) \\ 5+1 & 4+(-2) & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 3-0 & 2-(-1) \\ 5-1 & 4-(-2) & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix},$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 7 & 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

### Własności dodawania i mnożenia przez liczbę

Dla macierzy  $A, B, C$  tego samego wymiaru i liczb  $c, d \in \mathbb{R}$ :

- |                                |                                              |
|--------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. $A + B = B + A$             | 5. $c(A + B) = cA + cB$                      |
| 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ | 6. $(c + d)A = cA + dA$                      |
| 3. $A + 0 = A$                 | 7. $c(dA) = (cd)A$ , $1 \cdot A = A$         |
| 4. $A + (-A) = 0$              | 8. $(A + B)^T = A^T + B^T$ , $(cA)^T = cA^T$ |

 [MS, Działania na macierzach]

**Przykład 16 – równanie macierzowe**

Wyznacz macierz  $X$  z równania  $2A + X = B$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Rozwiązanie.** Dzięki własnościom dodawania przenosimy wyrazy jak w zwykłym równaniu:  
 $X = B - 2A$ .

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 4-0 \\ 0-4 & 1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie:  $2A + X = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+4 \\ 4-4 & -2+3 \end{bmatrix} = B$ . Podobnie np. z  $3X - A = B$  otrzymujemy  
 $X = \frac{1}{3}(A + B)$ .

**Przykład 17 – produkcja dwóch zakładów**

Produkcja [szt.] stołów, szafek i regałów (kolumny) w dwóch zakładach (wiersze) w październiku i listopadzie (wartości przykładowe):  $P_X = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 30 \\ 35 & 20 & 45 \end{bmatrix}$ ,  $P_{XI} = \begin{bmatrix} 44 & 31 & 26 \\ 39 & 22 & 41 \end{bmatrix}$ .

Zmiana produkcji:  $P_{XI} - P_X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$  (oba zakłady wykonały o 4 regały mniej); łącznie:

$$P_X + P_{XI} = \begin{bmatrix} 84 & 56 & 56 \\ 74 & 42 & 86 \end{bmatrix};$$

średnia miesięczna produkcja:  $\frac{1}{2}(P_X + P_{XI}) = \begin{bmatrix} 42 & 28 & 28 \\ 37 & 21 & 43 \end{bmatrix}.$

## 7 Mnożenie macierzy

### Definicja (iloczyn macierzy)

Niech  $A = [a_{ij}]$  będzie macierzą wymiaru  $m \times n$ , a  $B = [b_{ij}]$  – macierzą wymiaru  $n \times p$  (**liczba kolumn  $A$  musi być równa liczbie wierszy  $B$** ). Iloczynem  $AB$  nazywamy macierz  $C = [c_{ij}]$  wymiaru  $m \times p$ , w której

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Element  $c_{ij}$  jest iloczynem skalarnym  $i$ -tego wiersza macierzy  $A$  i  $j$ -tej kolumny macierzy  $B$  („wiersz razy kolumna”):  $(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$ .

 [MS, Działania na macierzach]

### Przykład 18

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Wymiary:  $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$ . Iloczyn w odwrotnej kolejności ma wymiar  $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = 3 \times 3$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 4-1 & 0+4 \\ 0+9 & 0-3 & 0+12 \\ -1+6 & -2-2 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 9 & -3 & 12 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

### Przykład 19

Iloczyn macierzy  $2 \times 3$  i  $2 \times 2$  **nie istnieje** (3 kolumny  $\neq$  2 wiersze). Dla macierzy kwadratowych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB \neq BA.$$

Iloczyn wektora wierszowego przez kolumnowy jest liczbą (macierzą  $1 \times 1$ ), np.

$$[1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 + 0 - 3 = -1.$$

### Twierdzenie (własności mnożenia macierzy)

Jeżeli występujące działania są wykonalne, to:

1.  $(AB)C = A(BC)$ ; 2.  $A(B+C) = AB+AC$ ,  $(A+B)C = AC+BC$ ; 3.  $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ ;
4.  $AI = IA = A$ ; 5.  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**: na ogół  $AB \neq BA$ .

 [MS, Działania na macierzach]

### Definicja (potęga macierzy)

Dla macierzy kwadratowej  $A$ :  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^k = A^{k-1} \cdot A$  ( $k = 2, 3, \dots$ ).

 [MS, Działania na macierzach]

## Przykład 20

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

## 8 Zastosowania w technologii drewna

## Przykład 21 – zapotrzebowanie na materiały

Zakład planuje wyprodukować 20 stołów, 15 szafek i 10 regałów: wektor planu  $\mathbf{p} = [20, 15, 10]^T$ . Macierz norm zużycia  $N$  (przykład 12) mnożymy przez  $\mathbf{p}$ ; wymiary:  $(3 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 3 \times 1$ .

$$N\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1,2 & 2,5 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 37,5 + 30 \\ 80 + 120 + 100 \\ 160 + 180 + 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,5 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{m}^2 \text{ płyty,} \\ \text{m obrzeża,} \\ \text{szt. okuć.} \end{matrix}$$

## Przykład 22 – koszt materiałów na wyroby

Ceny: płyta 60 zł/m<sup>2</sup>, obrzeże 3 zł/m, okucia 4 zł/szt., czyli  $\mathbf{c} = [60, 3, 4]^T$ . Aby otrzymać koszt materiałów na jeden wyrób, potrzebujemy macierzy, w której wiersze odpowiadają wyrobom – jest to macierz transponowana  $N^T$ :

$$N^T \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1,2 & 4 & 8 \\ 2,5 & 8 & 12 \\ 3 & 10 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 + 12 + 32 \\ 150 + 24 + 48 \\ 180 + 30 + 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116 \\ 222 \\ 274 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{zł – stół,} \\ \text{zł – szafka,} \\ \text{zł – regał.} \end{matrix}$$

Koszt materiałów na cały plan:  $\mathbf{p} \circ (N^T \mathbf{c}) = 20 \cdot 116 + 15 \cdot 222 + 10 \cdot 274 = 8390$  zł; ten sam wynik daje  $\mathbf{c} \circ (N\mathbf{p}) = 60 \cdot 91,5 + 3 \cdot 300 + 4 \cdot 500 = 8390$  zł.

## ★ Zapamiętaj

$A \pm B$ ,  $cA$  – element po elemencie, tylko dla macierzy tego samego wymiaru; równanie  $2A + X = B \Rightarrow X = B - 2A$ .

$AB$ : „wiersz razy kolumna”,  $(m \times n)(n \times p) = m \times p$ ; na ogół  $AB \neq BA$ ;  $AI = IA = A$ ;

$(AB)^T = B^T A^T$ ;  $\text{tr } A$  – suma elementów przekątnej głównej.

## Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.  
 [GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.  
 [BG] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.  
 [K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.  
 [HRW1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.