

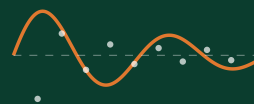
Streszczenie wykładu 7

Równania różniczkowe i ich zastosowania

Równanie różniczkowe, rząd • rozwiązanie ogólne i szczególne, zagadnienie początkowe • równania o zmiennych rozdzielonych • modele: rozkład zanieczyszczeń, oczyszczanie jeziora, stygnięcie, wzrost populacji

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Podstawowe pojęcia

Definicja (równanie różniczkowe)

Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie wiążące zmienną x , nieznaną funkcję $y = y(x)$ i jej pochodne. **Rzędem** równania nazywamy najwyższy rząd występującej w nim pochodnej.

[KW2, Równania różniczkowe]

Definicja (rozwiązanie ogólne i szczególne)

Rozwiązaniem równania jest każda funkcja, która je spełnia. **Rozwiązanie ogólne** równania rzędu pierwszego zawiera dowolną stałą C (rodzina krzywych). **Rozwiązanie szczególne** otrzymujemy, wyznaczając C z **warunku początkowego** $y(x_0) = y_0$ (zagadnienie początkowe).

[KW2, Równania różniczkowe]

Przykład 1 – sprawdzanie rozwiązania

Funkcja $y = Ce^{3x}$ spełnia równanie $y' = 3y$, bo $y' = 3Ce^{3x} = 3y$. Warunek $y(0) = 2$ daje $C = 2$, czyli $y = 2e^{3x}$.

2 Równania o zmiennych rozdzielonych

Metoda rozdzielania zmiennych

$$y' = f(x)g(y) \implies \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \implies \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Stałą całkowania dopisujemy raz, często w postaci $\ln |C|$. Jeżeli $g(y_0) = 0$, to $y \equiv y_0$ też jest rozwiązaniem.

[KW2, Równania różniczkowe]

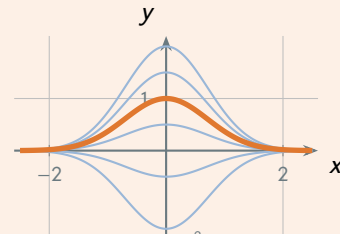
★ Zapamiętaj

Przydatne przekształcenia: $\ln |y| = \ln |x| + \ln |C| \Rightarrow y = Cx$;
 $\ln |y| = h(x) + \ln |C| \Rightarrow y = Ce^{h(x)}.$

Przykład 2

a) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|$,
 $y = Cx$; $C = 2$, $y = 2x$.

b) $y' = -2xy$, $y(0) = 1$: $\frac{dy}{y} = -2x dx$, $\ln |y| = -x^2 + \ln |C|$, $y = Ce^{-x^2}$;
 $y = e^{-x^2}$.



Rys. 1. Rodzina $y = Ce^{-x^2}$ i rozwiązanie z $C = 1$.

3 Modele w ochronie środowiska

Najważniejsze modele

rozkład, samooczyszczanie	$L' = -kL$	$L(t) = L_0 e^{-kt}$, okres półtrwania $T = \frac{\ln 2}{k}$
wzrost wykładniczy (Malthus)	$x' = ux$	$x(t) = x_0 e^{ut}$
zbiornik, stygnięcie	$c' = k(c_{\text{dop}} - c)$	$c(t) = c_{\text{dop}} + (c_0 - c_{\text{dop}})e^{-kt}$
wzrost logistyczny	$x' = kx(M - x)$	$x(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kMt}}$, $A = \frac{M - x_0}{x_0}$

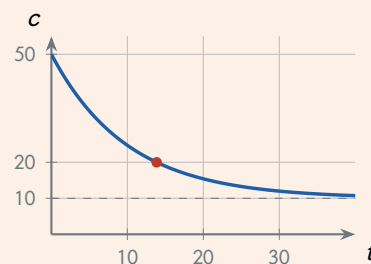
[KW2, Równania różniczkowe – zastosowania]

Przykład 3 – samooczyszczanie rzeki

BZT w rzece: $L_0 = 20$ mg/l, $k = 0,23$ doba⁻¹. Z $\frac{dL}{dt} = -kL$: $L(t) = 20e^{-0,23t}$; po 5 dobach $L \approx 6,3$ mg/l; okres półtrwania $\frac{\ln 2}{0,23} \approx 3$ doby.

Przykład 4 – oczyszczanie jeziora

Bilans masy w dobrze wymieszanym jeziorze: $Vc' = Q(c_{\text{dop}} - c)$, czyli $c' = k(c_{\text{dop}} - c)$, $k = \frac{Q}{V}$. Rozdzielając zmienne: $\frac{dc}{c_{\text{dop}} - c} = k dt$, $c(t) = c_{\text{dop}} + (c_0 - c_{\text{dop}})e^{-kt}$.
Dla $c_0 = 50$, $c_{\text{dop}} = 10$ mg/l, $k = 0,1$ doba⁻¹: $c(t) = 10 + 40e^{-0,1t}$; stężenie 20 mg/l po $t = 10 \ln 4 \approx 13,9$ doby.



Rys. 2. Stężenie dąży do stężenia w dopływie.

Przykład 5 – stygnięcie wody pochłódniczej

Prawo Newtona: $T' = -k(T - 15)$, $T(0) = 35^\circ\text{C} \Rightarrow T(t) = 15 + 20e^{-kt}$. Z warunku $T(10) = 30$: $e^{-10k} = \frac{3}{4}$, $k \approx 0,0288$ h⁻¹. Temperatura 25°C po $t = \frac{\ln 2}{k} \approx 24,1$ h.

Przykład 6 – populacje

Model Malthusa $x' = ux$ opisuje wzrost przy nieograniczonych zasobach ($u > 0$) lub wymieranie ($u < 0$). Model logistyczny $x' = kx(M - x)$ uwzględnia **pojemność środowiska** M : liczebność rośnie, a następnie stabilizuje się na poziomie M .

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [KW2] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. II, PWN, Warszawa 2006.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.