

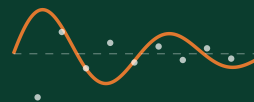
Streszczenie wykładu 7

Zastosowania pochodnych. Reguła de L'Hospitala

Reguła de L'Hospitala • wyrażenia nieoznaczone $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ • przykłady • wyznaczanie asymptot

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie (reguła de L'Hospitala)

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne na przedziale (a, b) (z wyjątkiem co najwyżej punktu c), $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, $x \neq c$, gdzie $-\infty \leq a < c < b \leq \infty$, oraz

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

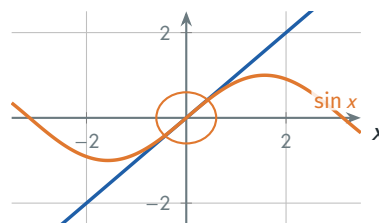
o ile granica po prawej stronie istnieje (właściwa lub niewłaściwa). Twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla $c = \pm\infty$.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Dlaczego reguła działa? Jeżeli $f(c) = g(c) = 0$, to w pobliżu punktu c (z różniczki):

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(c)(x - c)}{g'(c)(x - c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Np. dla $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ w pobliżu zera wykresy są prawie tą samą prostą, więc $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.



Rys. 1. W pobliżu 0: $\sin x \approx x$.

★ Zapamiętaj

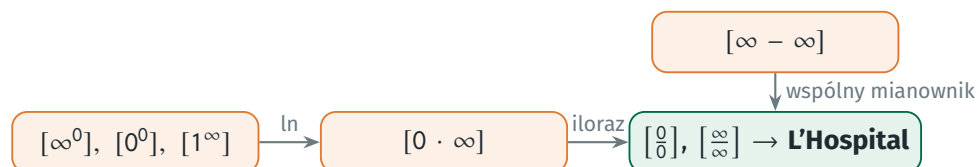
Liczymy **osobno** pochodną licznika i pochodną mianownika – **nie** pochodną ilorazu. Przed każdym zastosowaniem reguły sprawdzamy, czy rzeczywiście mamy symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; regułę można stosować kilkakrotnie.

2 Sprowadzanie symboli nieoznaczonych do postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$

Przekształcenia

$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	regułę stosujemy bezpośrednio .
$[\infty - \infty]$	sprowadzamy do wspólnego mianownika: $f - g = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v - u}{uv}$, gdzie $u = \frac{1}{f}$, $v = \frac{1}{g} \rightarrow \left[\frac{0}{0}\right]$.
$[0 \cdot \infty]$	zapisujemy iloczyn jako iloraz: $f \cdot g = \frac{f}{1/g} \rightarrow \left[\frac{0}{0}\right]$ lub $f \cdot g = \frac{g}{1/f} \rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
$[\infty^0], [0^0], [1^\infty]$	logarytmujemy: $\ln(f^g) = g \ln f \rightarrow [0 \cdot \infty]$; jeśli $\lim \ln y = L$, to $\lim y = e^L$.

[KW1]



Rys. 2. Schemat postępowania z symbolami nieoznaczonymi.

3 Przykłady

Przykład 1 – symbol $\frac{0}{0}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Rozwiązanie. a) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1} = 12$ (sprawdzenie: $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \rightarrow 12$).

b) $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Przykład 2 – symbol $\infty - \infty$

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

Rozwiązanie. Sprowadzamy do wspólnego mianownika i dwukrotnie stosujemy regułę:

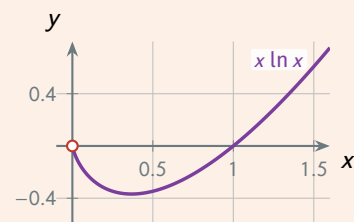
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}.$$

Przykład 3 – symbol $0 \cdot \infty$

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Rozwiązanie. $[0 \cdot (-\infty)]$; zapisujemy jako iloraz:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$



Przykład 4 – symbol 1^∞

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{a}{x}}$, $a > 0$.

Rozwiązanie. Niech $y = (1+x)^{a/x}$. Wtedy $\ln y = \frac{a \ln(1+x)}{x} \left[\frac{0}{0} \right]$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+x}}{1} = a, \quad \text{zatem} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{a}{x}} = e^a.$$

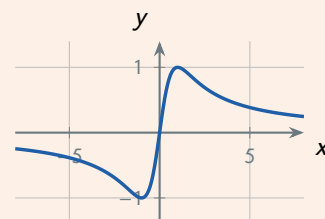
Przykład 5 – asymptoty

Wyznacz asymptoty funkcji $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Rozwiązanie. $D = \mathbb{R}$ (mianownik $1+x^2 > 0$), więc brak asymptot pionowych. Dalej

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} \left[\frac{\pm\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = 0,$$

zatem $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną.



Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.