

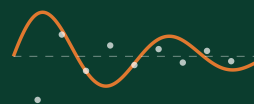
Streszczenie wykładu 8

Wektory: działania, norma, iloczyn skalarny

Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$ • współrzędne wektora • dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę, transpozycja • kombinacja liniowa, wersory • norma wektora, odległość punktów • iloczyn skalarny, kąt między wektorami, prostopadłość

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$

Definicja (wektor w $\mathbb{R}^n$)

Wektorem n -wymiarowym nazywamy uporządkowany układ n liczb rzeczywistych $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Liczby $a_1, \dots, a_n$ nazywamy **współrzędnymi** (składowymi) wektora. Zbiór wszystkich wektorów n -wymiarowych oznaczamy $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n] : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

[MS, Przestrzenie liniowe]

Definicja (przestrzeń wektorowa)

Zbiór $\mathbb{R}^n$ z działaniem dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby rzeczywiste nazywamy n -wymiarową rzeczywistą **przestrzenią wektorową**.

[MS, Przestrzenie liniowe]

Dla $n = 2$ wektory można przedstawić na płaszczyźnie, dla $n = 3$ – w przestrzeni. Dla $n > 3$ wektora nie da się narysować, ale wszystkie działania wykonuje się identycznie. W ochronie środowiska wektorem jest np. zestaw wyników analizy próbki wody (stężenia kilku substancji) albo zestaw rocznych emisji kilku zanieczyszczeń.

Definicja (wektor zaczepiony)

Wektor $\overrightarrow{AB}$ to uporządkowana para punktów: punkt A jest **początkiem** (punktem zaczepienia), punkt B – **końcem** wektora. Wektor ma **kierunek** (prosta, na której leży), **zwrot** (od A do B) i **długość**. Wektory o tej samej długości, kierunku i zwrocie uważamy za równe; zbiór takich wektorów to **wektor swobodny**.

[HRW1, Wektory]

Współrzędne wektora

$$\mathbb{R}^2: A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$$

$$\mathbb{R}^3: A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3]$$

$$\mathbb{R}^n: A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n]$$

Współrzędne wektora to różnice współrzędnych **końca** i **początku**.

[MS, Wektory]

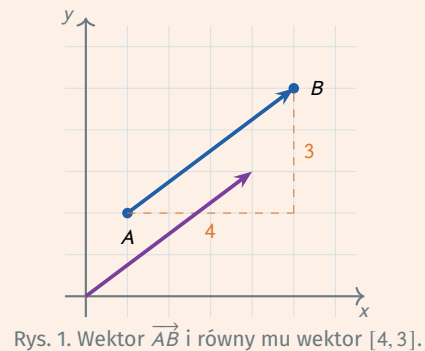
Przykład 1

Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeżeli $A = (1, 2)$, $B = (5, 5)$.

Rozwiązanie. $\overrightarrow{AB} = [5 - 1, 5 - 2] = [4, 3]$.

Wektor $[4, 3]$ zaczepiony w początku układu współrzędnych jest równy wektorowi $\overrightarrow{AB}$ (Rys. 1).

Dla $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 2, 3)$: $\overrightarrow{AB} = [3 - 1, 2 - 0, 3 - 2] = [2, 2, 1]$.



Rys. 1. Wektor $\overrightarrow{AB}$ i równy mu wektor $[4, 3]$.

Definicja (wektor kolumnowy i wierszowy, transpozycja)

Wektor można zapisać **w kolumnie** (wektor kolumnowy) lub **w wierszu** (wektor wierszowy). Zamianę jednego zapisu na drugi nazywamy **transpozycją** i oznaczamy symbolem T :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3], \quad \mathbf{b} = [d \ e \ f] \Rightarrow \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}.$$

[MS, Macierze]

2 Działania na wektorach

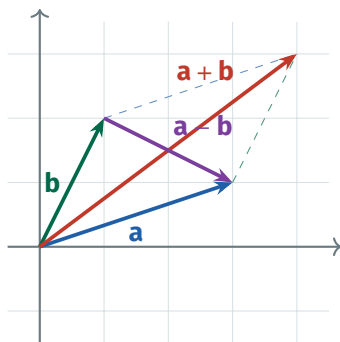
Definicja (działania na wektorach)

Niech $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$, $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$ oraz $k \in \mathbb{R}$.

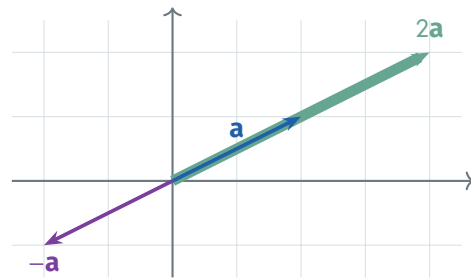
- **Suma:** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]$.
- **Różnica:** $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n]$.
- **Iloczyn wektora przez liczbę:** $k\mathbf{a} = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n]$.
- **Wektor zerowy:** $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]$; **wektor przeciwny:** $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} = [-a_1, \dots, -a_n]$.

Działania wykonujemy **po współrzędnych**. Dodawać i odejmować można tylko wektory o tej samej liczbie współrzędnych.

[MS, Wektory]



Rys. 2. Reguła równoległoboku: $\mathbf{a} = [3, 1]$, $\mathbf{b} = [1, 2]$.



Rys. 3. Mnożenie wektora $\mathbf{a} = [2, 1]$ przez liczbę.

Geometrycznie sumę $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ wyznacza przekątna równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (lub „łańcuszek”: początek $\mathbf{b}$ w końcu $\mathbf{a}$). Różnica $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ to wektor od końca $\mathbf{b}$ do końca $\mathbf{a}$. Mnożenie przez $k > 0$ zmienia długość k razy i zachowuje zwrot; mnożenie przez $k < 0$ zmienia zwrot na przeciwny.

Własności działań na wektorach

Dla dowolnych $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ oraz $k, l \in \mathbb{R}$:

- | | | |
|--|----------------|---|
| 1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ | (przemienność) | 5. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ |
| 2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | (łączność) | 6. $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ |
| 3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ | | 7. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$ |
| 4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ | | 8. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ |

[MS, Przestrzenie liniowe]

Przykład 2

Dla $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$ i $\mathbf{b} = [1, 4, -2]$ oblicz $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Rozwiązanie. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [2 + 1, -1 + 4, 3 - 2] = [3, 3, 1]$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [2 - 1, -1 - 4, 3 + 2] = [1, -5, 5]$;
 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = [6, -3, 9] - [2, 8, -4] = [4, -11, 13]$.

Przykład 3 – emisja z dwóch zakładów

Roczna emisja [t] (SO_2 , NO_x , pył) dwóch zakładów wynosi $\mathbf{e}_1 = [120, 80, 15]$ i $\mathbf{e}_2 = [60, 50, 10]$. Łączna emisja: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = [180, 130, 25]$. Po zainstalowaniu w zakładzie 1 filtrów zmniejszających emisję o 30%:

$$0,7 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = [84, 56, 10,5] + [60, 50, 10] = [144, 106, 20,5].$$

Definicja (kombinacja liniowa)

Kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazywamy każdy wektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ postaci

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

 [MS, Przestrzenie liniowe]

Definicja (wersor)

Wersorem nazywamy wektor, którego długość jest równa 1. **Wersory osi** układu współrzędnych: w $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{i} = [1, 0]$, $\mathbf{j} = [0, 1]$; w $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{j} = [0, 1, 0]$, $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$.

 [MS, Wektory]

Twierdzenie

Każdy wektor można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wersorów osi:

$$[a_1, a_2] = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}, \quad [a_1, a_2, a_3] = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}.$$

 [MS, Wektory]

Przykład 4

$$\mathbf{u} = [7, -3] = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}; \quad \mathbf{w} = [2, 0, -5] = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}; \quad 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = [4, 1, -1].$$

3 Norma (długość) wektora

Definicja (norma wektora)

Normą (długością) wektora $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ nazywamy liczbę

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

[MS, Iloczyn skalarny]

Własności normy

1. $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, przy czym $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$; 2. $\|k\mathbf{a}\| = |k| \|\mathbf{a}\|$; 3. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ (nierówność trójkąta).

[MS, Iloczyn skalarny]

Odległość punktów, wersor kierunku

Odległość punktów A i B : $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$.

Dla $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ wektor $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a}$ jest wersorem o tym samym kierunku i zwrocie co $\mathbf{a}$.

[MS, Wektory]

Przykład 5

a) $\mathbf{a} = [3, 4]$: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{5} [3, 4] = [0,6; 0,8]$.

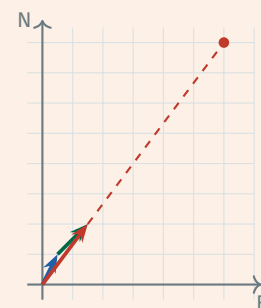
b) $\mathbf{b} = [2, -1, 2]$: $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$, $\mathbf{b}^0 = [\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

c) $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 2, 3)$: $\overrightarrow{AB} = [2, 2, 1]$, $d(A, B) = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$.

Przykład 6 – dryf płamy ropy

Plama ropy na jeziorze jest przesuwana przez prąd wody z prędkością $\mathbf{v}_1 = [1, 2]$ km/h oraz przez wiatr z prędkością $\mathbf{v}_2 = [2, 2]$ km/h (osie: wschód, północ). Wyciek nastąpił w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie. Prędkość wypadkowa: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [3, 4]$ km/h, szybkość $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ km/h. Po 4 h plama znajdzie się w punkcie $4\mathbf{v} = (12, 16)$, w odległości 20 km od miejsca wycieku.



Rys. 4. Tor plamy.

4 Iloczyn skalarny

Definicja (iloczyn skalarny)

Iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ i $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$ nazywamy **liczbę**

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Spotykane są też oznaczenia: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$.

[MS, Iloczyn skalarny]

Twierdzenie (własności iloczynu skalarnego)

Dla dowolnych $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$; 2. $\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$; 3. $(k\mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$; 4. $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$,
 $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

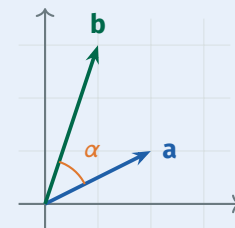
[MS, Iloczyn skalarny]

Twierdzenie (interpretacja geometryczna)

Jeżeli $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ jest kątem między niezerowymi wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, to

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha, \quad \text{czyli} \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Zatem: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} > 0$ – kąt ostry, $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} < 0$ – kąt rozwarty, $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$ – kąt prosty.



[MS, Iloczyn skalarny]

Twierdzenie (warunek prostopadłości)

Niezerowe wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są **prostopadłe (ortogonalne)**, co zapisujemy $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$ (bo $\cos 90^\circ = 0$).

[MS, Iloczyn skalarny]

Przykład 7

Oblicz iloczyn skalarny i kąt między wektorami $\mathbf{a} = [2, 1]$, $\mathbf{b} = [1, 3]$.

Rozwiązanie. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{10}$,

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Przykład 8

a) $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$, $\mathbf{b} = [1, 4, 2]$: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 2 - 4 + 6 = 4 > 0$ – kąt ostry.

b) $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$, $\mathbf{v} = [2, 1, 2]$: $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = 2 + 2 - 4 = 0$ – wektory są prostopadłe.

c) Dla jakiego m wektory $[m, 2, 1]$ i $[3, -1, m]$ są prostopadłe? $3m - 2 + m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

Przykład 9 – azot wnoszony z nawozami

Na pole wysiano trzy nawozy w ilościach $\mathbf{d} = [200, 150, 100]$ kg. Zawartość azotu w nawozach wynosi $\mathbf{w} = [0,34; 0,46; 0,15]$. Masa wprowadzonego azotu to suma iloczynów „ilość $\times$ zawartość”, czyli iloczyn skalarny:

$$N = \mathbf{d} \circ \mathbf{w} = 200 \cdot 0,34 + 150 \cdot 0,46 + 100 \cdot 0,15 = 68 + 69 + 15 = 152 \text{ kg}.$$

★ Zapamiętaj

$\overrightarrow{AB}$ = „koniec minus początek”; działania $+$, $-$, $k \cdot$ wykonujemy po współrzędnych;

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}; \quad \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \sum a_i b_i \text{ (wynik jest liczbą); } \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|};$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0.$$

Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
 [GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
 [BG] G. Banaszk, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
 [K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.
 [HRW1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.