

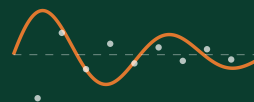
Streszczenie wykładu 8

Pochodne wyższych rzędów. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Monotoniczność i znak pochodnej • ekstrema lokalne • pochodne wyższych rzędów • wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia • pełne badanie przebiegu zmienności funkcji

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



★ Zapamiętaj

Plan badania przebiegu zmienności funkcji:

1. Dziedzina i zbiór wartości funkcji.
2. Punkty przecięcia z osiami układu, parzystość lub nieparzystość.
3. Granice funkcji na końcach dziedziny, asymptoty.
4. Pierwsza pochodna – przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne.
5. Druga pochodna – przedziały wypukłości i wklęsłości, punkty przegięcia.
6. Tabelka.
7. Szkic wykresu.

1 Pierwsza pochodna: monotoniczność i ekstrema

Twierdzenie (o monotoniczności funkcji)

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w (a, b) .

- ▶ Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest **rosnąca** w (a, b) (gdy $f'(x) \geq 0$ – niemalejąca).
- ▶ Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest **malejąca** w (a, b) (gdy $f'(x) \leq 0$ – nierosnąca).
- ▶ Jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest **stała** w (a, b) .

[GS, Zastosowania pochodnych]

Definicja (ekstrema lokalne)

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ **maksimum lokalne** (**minimum lokalne**), jeżeli istnieje otoczenie $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$, $\delta > 0$, takie, że dla wszystkich x z tego otoczenia zachodzi $f(x) \leq f(x_0)$ (odpowiednio $f(x) \geq f(x_0)$).

[GS, Zastosowania pochodnych]

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum – tw. Fermata)

Jeśli funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ ekstremum lokalne i istnieje $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Warunek nie jest dostateczny: dla $y = x^3$ mamy $y'(0) = 0$, a funkcja nie ma ekstremum w 0.

Twierdzenie (warunki dostateczne istnienia ekstremum)

Niech $f'(x_0) = 0$.

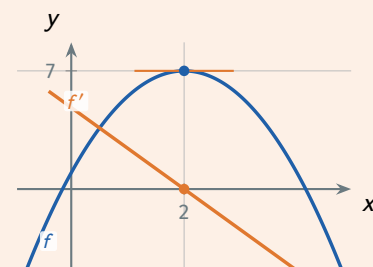
- ▶ **I postać.** Jeżeli f' przy przejściu przez x_0 zmienia znak z + na –, to f ma w x_0 **maksimum** lokalne; jeżeli z – na + – **minimum** lokalne.
- ▶ **II postać.** Jeżeli f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0 i $f''(x_0) < 0$, to f ma w x_0 **maksimum** lokalne; jeżeli $f''(x_0) > 0$ – **minimum** lokalne.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Przykład 1

Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji $y = -x^2 + 5x + 1$.

Rozwiązanie. $f'(x) = -2x + 5 = 0$ dla $x = 2,5$. Dla $x < 2,5$: $f'(x) > 0$ (funkcja rosnąca), dla $x > 2,5$: $f'(x) < 0$ (malejąca). Pochodna zmienia znak z + na –, więc $f_{\max} = f(2,5) = 7,25$. W punkcie maksimum styczna jest pozioma.



Rys. 1. Funkcja i jej pochodna.

2 Pochodne wyższych rzędów

Definicja (druga pochodna)

Jeżeli funkcja f i jej pochodna f' są różniczkowalne, to funkcję $f'' = (f')'$ nazywamy **drugą pochodną** funkcji f . Analogicznie definiujemy pochodne wyższych rzędów: $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$ itd.

[GS, Pochodne funkcji]

Przykład 2

Wyznacz pochodną czwartego rzędu funkcji $f(x) = \sin x \cos x$.

Rozwiązanie. $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, $f''(x) = -4\sin x \cos x$,
 $f'''(x) = -4(1 - 2\sin^2 x)$, $f^{(4)}(x) = 16\sin x \cos x$.

3 Druga pochodna: wypukłość, wklęsłość, przegięcie

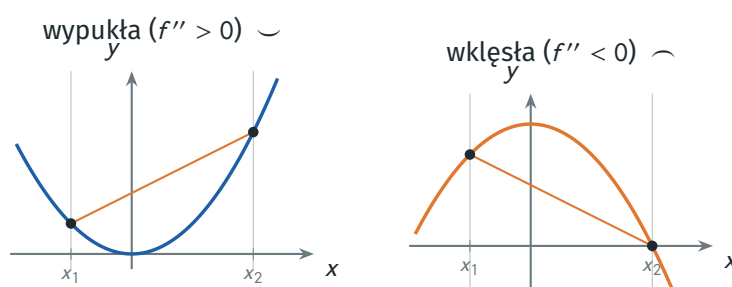
Definicja (wypukłość i wklęsłość)

Funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest **wypukła** w (a, b) , jeżeli dla wszystkich $\lambda \in (0; 1)$ i $x_1, x_2 \in (a, b)$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

a **wklęsła**, jeżeli zachodzi nierówność przeciwna ($\geq$). Geometrycznie: łuk wykresu funkcji wypukłej leży **poniżej** siecznej łączącej punkty $(x_1; f(x_1))$ i $(x_2; f(x_2))$, a funkcji wklęsłej – **powyżej**.

[GS, Zastosowania pochodnych]



Rys. 2. Funkcja wypukła i wklęsła oraz sieczne.

Twierdzenie (warunki dostateczne wypukłości i wklęsłości)

Jeżeli f jest różniczkowalna na (a, b) i f' jest rosnąca (np. $f'' \geq 0$ na (a, b)), to f jest **wypukła** na (a, b) . Jeżeli f' jest malejąca (np. $f'' \leq 0$), to f jest **wklęsła** na (a, b) .

[GS, Zastosowania pochodnych]

Definicja (punkt przegięcia)

Punktem przegięcia wykresu funkcji nazywamy taki jego punkt, w którym styczna do wykresu przechodzi z jednej strony krzywej na drugą (funkcja zmienia wypukłość na wklęsłość lub odwrotnie).

[F1, Badanie funkcji za pomocą pochodnych]

Twierdzenie (warunki istnienia punktu przegięcia)

Konieczny: jeśli wykres ma punkt przegięcia w x_0 i istnieje $f''(x_0)$, to $f''(x_0) = 0$.

Dostateczny: jeżeli $f''(x_0) = 0$ i f'' zmienia znak przy przejściu przez x_0 , to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

[GS, Zastosowania pochodnych]

Np. dla $y = x^3$: $y'' = 6x$ zmienia znak w $x = 0$, więc $(0; 0)$ jest punktem przegięcia.

4 Pełne badanie funkcji – przykład

Przykład 3

Zbadaj przebieg zmienności funkcji $y = x^3 - 3x^2$.

Rozwiązanie.

1. $D = \mathbb{R}$, zbiór wartości $\mathbb{R}$. Miejsca zerowe: $x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3) = 0$ dla $x = 0$ i $x = 3$.

2. Przecięcie z osią Oy : $(0; 0)$. $f(-x) = -x^3 - 3x^2$, więc funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = +\infty$. Brak asymptot (funkcja ciągła, granice niewłaściwe, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$).

4. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$ dla $x = 0$, $x = 2$. Znak: $f' > 0$ dla $x < 0$ i $x > 2$, $f' < 0$ dla $0 < x < 2$.

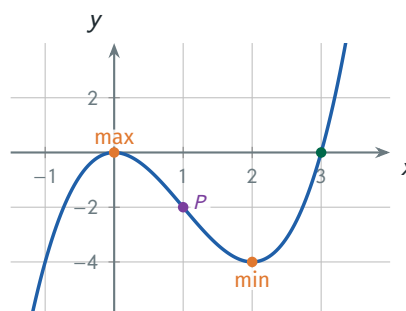
Zatem $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(2) = -4$.

5. $f''(x) = 6x - 6 = 0$ dla $x = 1$; $f'' < 0$ dla $x < 1$ (wklęsła), $f'' > 0$ dla $x > 1$ (wypukła). Punkt przegięcia $P(1; -2)$.

7. Szkic wykresu

6. Tabelka

x	$-\infty$	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$	∞
y'		+	0	-	0	+	
y''		-	-6	$- \rightarrow +$	6	+	
y	$-\infty$	$\nearrow \cup$	0 max	$\searrow$, p.p. $(1; -2)$	-4 min	$\nearrow \cup$	∞



Rys. 3. Wykres funkcji $y = x^3 - 3x^2$.

Literatura

[F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.

[KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.

[GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.