

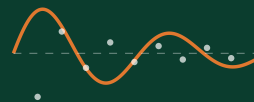
Streszczenie wykładu 9

Macierze: rodzaje, działania na macierzach

Definicja macierzy • macierz zerowa, kwadratowa, trójkątna, diagonalna, jednostkowa, symetryczna • transpozycja, ślad • dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę • mnożenie macierzy i jego własności • zastosowania

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Macierz

Definicja (macierz)

Macierzą wymiaru $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych ustawionych w m wierszach i n kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Liczbę a_{ij} nazywamy **elementem** macierzy; pierwszy indeks (i) oznacza numer **wiersza**, drugi (j) – numer **kolumny**.

[MS, Macierze]

Definicja (wektory wierszowe i kolumnowe macierzy)

Wektorem wierszowym macierzy A wymiaru $m \times n$ nazywamy każdy jej wiersz (podmacierz $1 \times n$), a **wektorem kolumnowym** – każdą jej kolumnę (podmacierz $m \times 1$). Każdą macierz można więc traktować jako układ m wektorów wierszowych lub n wektorów kolumnowych.

[MS, Macierze]

Przykład 1

Średnie roczne stężenia [$\mu\text{g}/\text{m}^3$] PM₁₀, NO₂ i SO₂ (kolumny) na trzech stacjach (wiersze):

$$A = \begin{bmatrix} 38 & 32 & 6 \\ 25 & 18 & 4 \\ 19 & 12 & 3 \end{bmatrix}.$$

Macierz ma wymiar 3×3 ; $a_{21} = 25$ to stężenie PM₁₀ na stacji 2; drugi wiersz $[25, 18, 4]$ to wyniki stacji 2, trzecia kolumna – stężenia SO₂ na wszystkich stacjach.

2 Rodzaje macierzy

Definicja (rodzaje macierzy)

- ▶ **Macierz zerowa** $0_{m \times n}$: wszystkie elementy są równe zero, $a_{ij} = 0$.
- ▶ **Macierz kwadratowa** stopnia n : liczba wierszy równa liczbie kolumn ($m = n$). Elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tworzą **przekątną główną**.
- ▶ **Macierz górnortrójkątna**: macierz kwadratowa, w której $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ (pod przekątną same zera).
- ▶ **Macierz dolnortrójkątna**: macierz kwadratowa, w której $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (nad przekątną same zera).
- ▶ **Macierz diagonalna**: macierz kwadratowa, w której $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ (niezerowe elementy mogą być tylko na przekątnej).
- ▶ **Macierz jednostkowa** I_n : macierz diagonalna, której wszystkie elementy przekątnej są równe 1.
- ▶ **Macierz symetryczna**: macierz kwadratowa, w której $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich i, j .

 [MS, Macierze]

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
 \text{zerowa } 2 \times 3 & \text{górnortrójkątna} & \text{dolnortrójkątna} & \text{diagonalna} & \text{jednostkowa } I_3 & \text{symetryczna}
 \end{array}$$

Definicja (macierz transponowana)

Macierzą transponowaną do macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$, powstałą przez zamianę wierszy na kolumny (pierwszy wiersz A staje się pierwszą kolumną A^T itd.).

 [MS, Macierze]

Przykład 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad (A^T)^T = A; \quad A \text{ symetryczna} \iff A^T = A.$$

Definicja (ślad macierzy)

Śladem macierzy kwadratowej A nazywamy sumę elementów jej przekątnej głównej:

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

 [MS, Macierze]

Przykład 3

$$\text{tr} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 + (-3) + 2 = \boxed{3}; \quad \text{tr } I_n = n.$$

3 Dodawanie macierzy i mnożenie przez liczbę

Definicja (równość, suma, różnica, iloczyn przez liczbę)

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami **tego samego wymiaru** $m \times n$ oraz $c \in \mathbb{R}$.

- ▶ $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} = b_{ij}$ dla wszystkich i, j .
- ▶ **Sumą** macierzy nazywamy macierz $C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.
- ▶ **Różnicą** macierzy nazywamy macierz $C = A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$.
- ▶ **Iloczynem macierzy przez liczbę** c nazywamy macierz $cA = [c a_{ij}]_{m \times n}$.

Dodawać i odejmować można tylko macierze tego samego wymiaru; działania wykonujemy „element po elemencie”.

 [MS, Działania na macierzach]

Przykład 4

Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 & 2+(-1) \\ 5+1 & 4+(-2) & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 3-0 & 2-(-1) \\ 5-1 & 4-(-2) & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix},$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 7 & 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

Własności dodawania i mnożenia przez liczbę

Dla macierzy A, B, C tego samego wymiaru i liczb $c, d \in \mathbb{R}$:

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $A + B = B + A$ | 5. $c(A + B) = cA + cB$ |
| 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ | 6. $(c + d)A = cA + dA$ |
| 3. $A + 0 = A$ | 7. $c(dA) = (cd)A$, $1 \cdot A = A$ |
| 4. $A + (-A) = 0$ | 8. $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(cA)^T = cA^T$ |

 [MS, Działania na macierzach]

Przykład 5 – równanie macierzowe

Wyznacz macierz X z równania $2A + X = B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Przenosimy jak w zwykłym równaniu: $X = B - 2A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Przykład 6 – emisja w dwóch latach

Emisja [t] SO₂, NO_x, pyłu (kolumny) z dwóch zakładów (wiersze): $E_{24} = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 15 \\ 60 & 50 & 10 \end{bmatrix}$,

$$E_{25} = \begin{bmatrix} 100 & 76 & 12 \\ 62 & 44 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zmiana emisji: $E_{25} - E_{24} = \begin{bmatrix} -20 & -4 & -3 \\ 2 & -6 & -2 \end{bmatrix}$; średnia roczna: $\frac{1}{2}(E_{24} + E_{25}) = \begin{bmatrix} 110 & 78 & 13,5 \\ 61 & 47 & 9 \end{bmatrix}$.

4 Mnożenie macierzy

Definicja (iloczyn macierzy)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$, a $B = [b_{ij}]$ – macierzą wymiaru $n \times p$ (**liczba kolumn A musi być równa liczbie wierszy B**). **Iloczynem AB** nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times p$, w której

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Element c_{ij} jest iloczynem skalarnym i -tego wiersza macierzy A i j -tej kolumny macierzy B („wiersz razy kolumna”).

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p).$$

 [MS, Działania na macierzach]

Przykład 7

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}.$$

Wymiary: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$. Iloczyn w odwrotnej kolejności ma wymiar $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = 3 \times 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 4-1 & 0+4 \\ 0+9 & 0-3 & 0+12 \\ -1+6 & -2-2 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 9 & -3 & 12 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Przykład 8

Iloczyn macierzy 2×3 i 2×2 **nie istnieje** (3 kolumny $\neq$ 2 wiersze). Dla macierzy kwadratowych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB \neq BA.$$

Twierdzenie (własności mnożenia macierzy)

Jeżeli występujące działania są wykonalne, to:

1. $(AB)C = A(BC)$; 2. $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$; 3. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$;
4. $AI = IA = A$; 5. $(AB)^T = B^T A^T$.

Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**: na ogół $AB \neq BA$.

 [MS, Działania na macierzach]

Definicja (potęga macierzy)

Dla macierzy kwadratowej A : $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^k = A^{k-1} \cdot A$ ($k = 2, 3, \dots$).

 [MS, Działania na macierzach]

Przykład 9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

5 Zastosowania**Przykład 10 – składniki z nawozów**

Nawóz A zawiera 4% N, 12% P, 12% K, a nawóz B – po 10% każdego składnika. Na działkę wysiano 50 kg nawozu A i 20 kg nawozu B. Macierz składu Z (wiersze: N, P, K; kolumny: nawozy) mnożymy przez wektor dawek $\mathbf{d}$:

$$Z\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,10 \\ 0,12 & 0,10 \\ 0,12 & 0,10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 6+2 \\ 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ kg (N, P, K).}$$

Przykład 11 – opłaty za emisję

Przy macierzy emisji E_{25} (przykład 6) i przyjętych stawkach opłat $\mathbf{f} = [600, 600, 400]^T$ zł/t:

$$E_{25} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 100 \cdot 600 + 76 \cdot 600 + 12 \cdot 400 \\ 62 \cdot 600 + 44 \cdot 600 + 8 \cdot 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110\,400 \\ 66\,800 \end{bmatrix} \text{ zł.}$$

★ Zapamiętaj

$A \pm B$, cA – element po elemencie, tylko dla macierzy tego samego wymiaru. AB : „wiersz razy kolumna”, $(m \times n)(n \times p) = m \times p$.

Na ogół $AB \neq BA$; $AI = IA = A$; $(AB)^T = B^T A^T$; $\text{tr } A$ – suma elementów przekątnej głównej.

Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
- [GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
- [BG] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
- [K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.