

Streszczenie wykładów 9–10

Wyznaczniki, macierz odwrotna, układy równań

Blok V (19.12.2026) • wyznacznik stopnia 2 i 3 (reguła Sarrusa), dopełnienia algebraiczne, rozwinięcie Laplace'a • własności wyznaczników, operacje elementarne • macierz nieosobliwa, pole trójkąta • macierz odwrotna, równania macierzowe • rząd macierzy • układy równań liniowych: Kronecker–Capelli, wzory Cramera, macierz odwrotna, eliminacja Gaussa • plan produkcji, mieszanie zrębków, masa klejowa

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Wyznacznik macierzy

Definicja (dopełnienie algebraiczne)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Przez A_{ij} oznaczamy macierz stopnia $n - 1$ powstałą z A przez **skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny**; jej wyznacznik $\det A_{ij}$ nazywamy **minorem**. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

[MS, Wyznaczniki]

Definicja (wyznacznik)

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej A nazywamy liczbę $\det A$ (oznaczaną też $|A|$) określoną indukcyjnie:

- ▶ jeżeli $A = [a_{11}]$ (stopień 1), to $\det A = a_{11}$;
- ▶ jeżeli A ma stopień $n \geq 2$, to $\det A = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots + a_{1n}D_{1n}$ (rozwinięcie względem pierwszego wiersza).

Wyznacznik określony jest **tylko dla macierzy kwadratowych**.

[MS, Wyznaczniki]

Wyznacznik stopnia 2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

– iloczyn elementów przekątnej głównej minus iloczyn elementów drugiej przekątnej.

[MS, Wyznaczniki]

Przykład 1

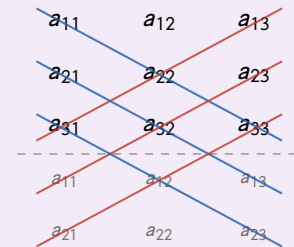
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-4) \cdot (-1) = 24 - 4 = 20; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0 \quad (\text{wiersze proporcjonalne}).$$

Wyznacznik stopnia 3 – reguła Sarrusa

Pod wyznacznikiem dopisujemy jego dwa pierwsze wiersze. Iloczyn elementów na trzech przekątnych „w dół w prawo” bierzemy ze znakiem +, a na trzech przekątnych „w dół w lewo” – ze znakiem –:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Reguła Sarrusa dotyczy **wyłącznie** wyznaczników stopnia 3.



Rys. 1. + i – w regule Sarrusa.

[MS, Wyznaczniki]

Przykład 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2) = 15 - 18 = -3.$$

Twierdzenie (rozwinięcie Laplace’a)

Wyznacznik macierzy stopnia n można obliczyć, rozwijając go względem **dowolnego** wiersza lub **dowolnej** kolumny:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in} \quad (i\text{-ty wiersz}),$$

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj} \quad (j\text{-ta kolumna}).$$

Najwygodniej wybrać wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer. Znaki $(-1)^{i+j}$ tworzą

„szachownicę”
$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \end{bmatrix}.$$

[MS, Wyznaczniki]

Przykład 3 – dopełnienia algebraiczne

Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ obliczamy dopełnienia algebraiczne elementów pierwszego wiersza:

$$D_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad D_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad D_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Rozwinięcie względem 1. wiersza: $\det A = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-7) + 2 \cdot 1 = 12.$

Przykład 4 – wyznacznik stopnia 4

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{2. kolumna}}{=} 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot [(8+0+3) - (6+0+2)] = -3 \cdot 3 = \boxed{-9}.$$

W 2. kolumnie tylko element $a_{32} = 3$ jest niezerowy, więc pozostałe składniki rozwinięcia są równe zero.

2 Własności wyznaczników**Twierdzenie (własności wyznaczników)**

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n .

1. $\det A^T = \det A$; dlatego każda własność dotycząca wierszy jest prawdziwa także dla kolumn.
2. Jeżeli macierz ma wiersz (kolumnę) złożony z samych zer, to $\det A = 0$.
3. Zamiana miejscami dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika.
4. Jeżeli dwa wiersze (kolumny) są równe lub proporcjonalne, to $\det A = 0$.
5. Pomnożenie wiersza (kolumny) przez liczbę c mnoży wyznacznik przez c ; w szczególności $\det(cA) = c^n \det A$.
6. Dodanie do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez dowolną liczbę nie zmienia wyznacznika.
7. Wyznacznik macierzy trójkątnej (w tym diagonalnej) jest równy iloczynowi elementów przekątnej głównej; $\det I = 1$.
8. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (twierdzenie Cauchy'ego).
9. Na ogół $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

 [MS, Własności wyznaczników]

Przykład 5

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ (wiersz 2 jest równy podwojonemu wierszowi 1);} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 20, \text{ więc po zamianie wierszy } \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -20;$$

$$\text{d) jeżeli } \det A = 5 \text{ i } A \text{ jest stopnia 3, to } \det(2A) = 2^3 \cdot 5 = 40, \det A^T = 5, \det(A^2) = 5 \cdot 5 = 25.$$

Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) i ich wpływ na wyznacznik

$W_i \leftrightarrow W_j$	zamiana wiersza i -tego z j -tym	wyznacznik zmienia znak
$W_i \rightarrow cW_i$	pomnożenie wiersza i przez $c \neq 0$	wyznacznik razy c
$W_i \rightarrow W_i + cW_j$	dodanie do wiersza i wiersza j razy c	wyznacznik bez zmian

Analogiczne operacje na kolumnach oznaczamy $K_i \leftrightarrow K_j$, $K_i \rightarrow cK_i$, $K_i \rightarrow K_i + cK_j$. Operacjami $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ sprowadzamy macierz do **postaci trójkątnej** (zera pod przekątną), a następnie korzystamy z własności 7.

 [GuS, Wyznaczniki]

Przykład 6 – sprowadzanie do postaci trójkątnej

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{W_2 - 2W_1, W_3 + W_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{W_3 - 3W_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = \boxed{-1}.$$

Definicja (macierz osobliwa i nieosobliwa)

Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, gdy $\det A \neq 0$, oraz **osobliwą**, gdy $\det A = 0$.

 [MS, Wyznaczniki]

Przykład 7

Dla jakich x macierz $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}$ jest osobliwa?

Rozwiązanie. $\det = x(x+1) - 6 = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3 \text{ lub } x = 2}.$

Pole trójkąta, współliniowość punktów

Wartość bezwzględna wyznacznika $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ jest polem równoległoboku rozpiętego na wektorach $[a_1, a_2]$ i $[b_1, b_2]$. Stąd pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$P = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right|.$$

Punkty A, B, C leżą na jednej prostej $\iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (trójkąt o polu 0).

 [MS, Wyznaczniki – interpretacja geometryczna]

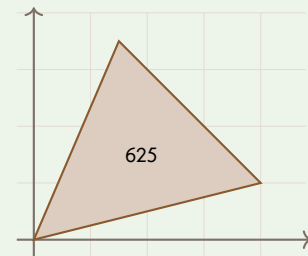
Przykład 8 – plac składowy kłód

Plac składowy ma kształt trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(40, 10)$, $C(15, 35)$ (współrzędne w metrach, wartości przykładowe).

Rozwiązanie. $\vec{AB} = [40, 10]$, $\vec{AC} = [15, 35]$,

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 40 & 10 \\ 15 & 35 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |1400 - 150| = 625 \text{ m}^2.$$

Plac w kształcie wielokąta dzielimy przekątnymi na trójkąty i sumujemy ich pola.



Rys. 2. Plac składowy (m).

3 Macierz odwrotna

Definicja (macierz odwrotna)

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Macierz A^{-1} nazywamy **macierzą odwrotną** do macierzy A , jeżeli

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

[MS, Macierz odwrotna]

Twierdzenie (warunek istnienia, wzór)

Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy A jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$). Macierz odwrotna jest wtedy wyznaczona jednoznacznie oraz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T, \quad D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Macierz $[D_{ij}]^T$ nazywamy **macierzą dołączoną** do A .

[MS, Macierz odwrotna]

Macierz odwrotna stopnia 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

– elementy przekątnej zamieniamy miejscami, pozostałym zmieniamy znak, całość dzielimy przez wyznacznik.

[MS, Macierz odwrotna]

Przykład 9

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}: \det A = 8 - 3 = 5, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sprawdzenie: } \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 - 0,6 & -0,8 + 0,8 \\ 1,2 - 1,2 & -0,6 + 1,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ nie ma odwrotnej, bo jej wyznacznik jest równy 0.

Algorytm – metoda dopeńień algebraicznych

1. Obliczamy $\det A$. Jeżeli $\det A = 0$, macierz odwrotna nie istnieje – koniec.
2. Obliczamy wszystkie dopeńienia algebraiczne $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ i tworzymy macierz $[D_{ij}]$.
3. Transponujemy ją i dzielimy przez wyznacznik: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T$.
4. Sprawdzamy: $A \cdot A^{-1} = I$.

 [MS, Macierz odwrotna]

Przykład 10 – macierz stopnia 3

$$\text{Wyznacz macierz odwrotną do } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. 1. Reguła Sarrusa: $\det A = (-2 - 4 - 2) - (-1 - 4 - 4) = -8 + 9 = 1 \neq 0$.

2. Dopeńienia algebraiczne:

$$\begin{aligned} D_{11} &= + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, & D_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, & D_{13} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \\ D_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & D_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & D_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ D_{31} &= + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, & D_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, & D_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

$$3. [D_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{1} [D_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sprawdzenie: $AA^{-1} = I_3$.

Metoda Gaussa-Jordana (operacji elementarnych)

Tworzymy macierz $[A | I]$ (macierz A uzupełniona z prawej strony macierzą jednostkową). Wykonując operacje elementarne **wyłącznie na wierszach** ($W_i \leftrightarrow W_j$, $W_i \rightarrow cW_i$ dla $c \neq 0$, $W_i \rightarrow W_i + cW_j$), przekształcamy lewą część w macierz jednostkową. Prawa część staje się wtedy macierzą odwrotną:

$$[A | I] \longrightarrow [I | A^{-1}].$$

Jeżeli w lewej części pojawi się wiersz zerowy, to $\det A = 0$ i macierz odwrotna nie istnieje.

[GuS, Macierz odwrotna]

Przykład 11

Macierz z przykładu 10 metodą Gaussa-Jordana:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} W_1 + W_2 \\ W_2 - 2W_1 \\ W_3 - W_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} W_1 - 3W_3 \\ W_2 - 2W_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Twierdzenie (własności macierzy odwrotnej)

Jeżeli A i B są nieosobliwymi macierzami stopnia n oraz $c \neq 0$, to:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$; 2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
4. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$; 5. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

[MS, Macierz odwrotna]

Równania macierzowe

Jeżeli A jest nieosobliwa, to: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (mnożymy obie strony przez A^{-1} **z lewej**);
 $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (**z prawej**).

Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne, kolejność czynników jest istotna.

[MS, Macierz odwrotna]

Przykład 12

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}: \det A = 1, A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, X = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$b) AX - A = 2X \Rightarrow AX - 2X = A \Rightarrow (A - 2I)X = A \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}A \text{ (o ile } \det(A - 2I) \neq 0).$$

Przykład 13 – odtworzenie planu produkcji

Stolarnia produkuje stoły (s) i krzesła (k). Stół zużywa 2 m^2 płyty i 4 h pracy, krzesło – $0,5 \text{ m}^2$ płyty i 2 h pracy (wartości przykładowe). W tygodniu zużyto 70 m^2 płyty i 180 h pracy. Ile wyprodukowano stołów i krzesel?

Rozwiązanie. $A \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 180 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = 4 - 2 = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 70 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 - 45 \\ -140 + 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie: $2 \cdot 25 + 0,5 \cdot 40 = 70$, $4 \cdot 25 + 2 \cdot 40 = 180$. W kolejnym tygodniu zużyto 80 m^2 płyty i 200 h – wystarczy jedno mnożenie: $A^{-1} [80, 200]^T = [80 - 50, -160 + 200]^T = [30, 40]^T$, czyli 30 stołów i 40 krzesel.

4 Rząd macierzy (intuicyjnie)**Definicja (rząd macierzy)**

Rzędem macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy (lub – równoważnie – kolumn) tej macierzy, czyli takich, z których żaden nie jest kombinacją liniową pozostałych. Oznaczenie: $\text{rz } A$. Dla macierzy kwadratowej stopnia n : $\text{rz } A = n \iff \det A \neq 0$.

 [MS, Rząd macierzy]

Obliczanie rzędu – postać schodkowa

Operacje elementarne na wierszach ($W_i \leftrightarrow W_j$, $W_i \rightarrow cW_i$ dla $c \neq 0$, $W_i \rightarrow W_i + cW_j$) nie zmieniają rzędu. Za ich pomocą tworzymy zera pod pierwszym niezerowym elementem kolejnych wierszy (postać **schodkowa**). Rząd macierzy jest równy liczbie **niezerowych wierszy** postaci schodkowej.

 [GuS, Rząd macierzy]

Przykład 14

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ W_2 - 2W_1 \\ W_3 - 3W_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ W_3 - W_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rz} = \boxed{2}.$$

Trzeci wiersz jest sumą dwóch pierwszych – nie wnosi nowej informacji.

5 Układy równań liniowych

Definicja (układ równań liniowych)

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ są **współczynnikami**, $b_i \in \mathbb{R}$ – **wyrazami wolnymi**, a $x_1, \dots, x_n$ – **niewiadomymi**. Jeżeli $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, układ nazywamy **jednorodnym**. **Rozwiązaniem** układu jest każdy ciąg liczb $(x_1, \dots, x_n)$ spełniający wszystkie równania.

[MS, Układy równań liniowych]

Definicja (zapis macierzowy)

Układ zapisujemy w postaci $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad [A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

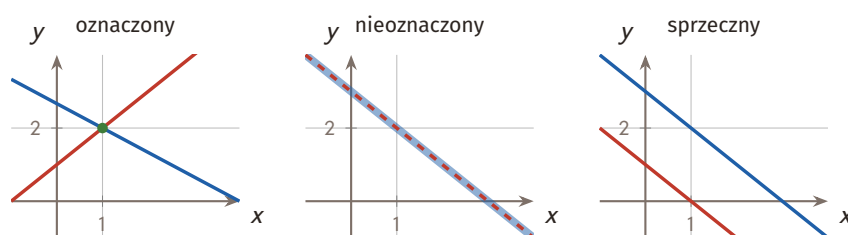
A – **macierz układu**, B – **wektor wyrazów wolnych**, $[A | B]$ – **macierz rozszerzona** (uzupełniona).

[MS, Układy równań liniowych]

Definicja (rodzaje układów)

Układ nazywamy **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie; **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań; **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań. Innych możliwości nie ma.

[MS, Układy równań liniowych]



Rys. 3. Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi – dwie proste: przecinające się ($2x + 3y = 8$, $x - y = -1$), pokrywające się ($x + y = 3$, $2x + 2y = 6$), równoległe ($x + y = 3$, $x + y = 1$).

Twierdzenie (Kroneckera–Capellego)

Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej: $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B]$. Ponadto, jeśli n jest liczbą niewiadomych, to:

- ▶ $\text{rz } A \neq \text{rz}[A \mid B] \Rightarrow$ układ **sprzeczny**;
- ▶ $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B] = n \Rightarrow$ układ **oznaczony**;
- ▶ $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B] = r < n \Rightarrow$ układ **nieoznaczony**; rozwiązania zależą od $n - r$ parametrów.

 [MS, Układy równań liniowych]

6 Wzory Cramera i metoda macierzy odwrotnej

Definicja (układ Cramera)

Układ $AX = B$, w którym macierz A jest **kwadratowa** (liczba równań = liczba niewiadomych) i **nieosobliwa** ($\det A \neq 0$), nazywamy **układem Cramera**. Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie.

 [MS, Układy Cramera]

Twierdzenie (wzory Cramera)

Rozwiązanie układu Cramera dane jest wzorami

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{W_n}{W},$$

gdzie $W = \det A$, a W_j jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy A przez zastąpienie jej j -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

 [MS, Układy Cramera]

Algorytm – metoda Cramera

1. Sprawdzamy, czy macierz A jest kwadratowa, i obliczamy $W = \det A$. Jeżeli $W = 0$, metody nie można zastosować.
2. Obliczamy wyznaczniki $W_1, \dots, W_n$ (w j -tej kolumnie wpisujemy wyrazy wolne).
3. Wyznaczamy $x_j = W_j / W$. 4. Sprawdzamy rozwiązanie, podstawiając je do wszystkich równań.

 [MS, Układy Cramera]

Przykład 15

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases} : \quad W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad W_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad W_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -10; \quad x = \frac{-5}{-5} = \boxed{1},$$

$$y = \frac{-10}{-5} = \boxed{2}.$$

Przykład 16 – plan produkcji mebli

Zakład produkuje stoły, krzesła i szafki. Na stół zużywa się 2 m² płyty, 3 m² okleiny i 4 h pracy, na krzesło – 1 m² płyty, 1 m² okleiny i 3 h, na szafkę – 3 m² płyty, 4 m² okleiny i 10 h (wartości przykładowe). Zakład dysponuje 120 m² płyty, 150 m² okleiny i 360 h pracy. Ile mebli każdego rodzaju należy wykonać, aby w pełni wykorzystać zasoby?

Rozwiązanie. x_1, x_2, x_3 – liczby stołów, krzeseł i szafek:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 120 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 150 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 360 \end{cases} \quad W = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = (20 + 27 + 16) - (12 + 24 + 30) = -3 \neq 0.$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 120 & 1 & 3 \\ 150 & 1 & 4 \\ 360 & 3 & 10 \end{vmatrix} = (1200 + 1350 + 1440) - (1080 + 1440 + 1500) = -30,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 120 & 3 \\ 3 & 150 & 4 \\ 4 & 360 & 10 \end{vmatrix} = (3000 + 3240 + 1920) - (1800 + 2880 + 3600) = -120,$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 120 \\ 3 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 360 \end{vmatrix} = (720 + 1080 + 600) - (480 + 900 + 1080) = -60.$$

$x_1 = \frac{-30}{-3} = 10$, $x_2 = \frac{-120}{-3} = 40$, $x_3 = \frac{-60}{-3} = 20$: 10 stołów, 40 krzeseł, 20 szafek.
Sprawdzenie: $20 + 40 + 60 = 120$, $30 + 40 + 80 = 150$, $40 + 120 + 200 = 360$.

Metoda macierzy odwrotnej

Dla układu Cramera: $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

1. Sprawdzamy, że $\det A \neq 0$; **2.** wyznaczamy A^{-1} ; **3.** obliczamy $X = A^{-1}B$; **4.** sprawdzamy rozwiązanie. Metoda jest opłacalna, gdy rozwiązujemy wiele układów z tą samą macierzą A (por. przykład 13).

 [MS, Układy Cramera]

Przykład 17

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{Macierz układu jest macierzą z przykładu 10: } \det A = 1, A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 7 - 9 \\ 0 + 7 - 6 \\ -2 + 0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7 Metoda eliminacji Gaussa

Operacje elementarne na układzie

Zbiór rozwiązań układu nie zmienia się, gdy na wierszach macierzy rozszerzonej $[A | B]$ wykonujemy operacje: $W_i \leftrightarrow W_j$ (zamiana miejscami dwóch równań); $W_i \rightarrow cW_i$, $c \neq 0$ (pomnożenie równania przez liczbę różną od zera); $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ (dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę). Można też skreślić równanie postaci $0 = 0$.

 [GuS, Metoda Gaussa]

Algorytm – metoda eliminacji Gaussa

1. Zapisujemy macierz rozszerzoną $[A | B]$.
2. **Eliminacja w przód:** operacjami elementarnymi sprowadzamy macierz do postaci schodkowej (zera pod przekątną).
3. Odczytujemy rz A i rz $[A | B]$. Wiersz postaci $[0 \dots 0 | d]$, $d \neq 0$, oznacza układ **sprzeczny**.
4. **Podstawianie wstecz:** z ostatniego równania wyznaczamy ostatnią niewiadomą, wstawiamy do wcześniejszych itd. Gdy $r < n$, $n - r$ niewiadomych przyjmujemy za parametry. Metoda działa dla **każdego** układu (także gdy $m \neq n$ lub $\det A = 0$).

 [GuS, Metoda Gaussa]

Przykład 18 – układ oznaczony

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - 2W_1, W_3 - W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 \leftrightarrow W_3} \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 + 3W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

rz A = rz $[A | B]$ = 3 = n – układ oznaczony. Podstawianie wstecz: $-7z = -7 \Rightarrow z = 1$;
 $y - 2z = -3 \Rightarrow y = -1$; $x + y + z = 2 \Rightarrow x = 2$. $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Przykład 19 – układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - 2W_1, W_3 - 3W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 - W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rz } A = \text{rz}[A | B] = 2 < 3$ – układ nieoznaczony, $3 - 2 = 1$ parametr. Przyjmujemy $z = t$: $y = t$, $x = 3 - y - z = 3 - 2t$.

Rozwiązanie: $(x, y, z) = (3 - 2t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; np. dla $t = 0$: $(3, 0, 0)$, dla $t = 1$: $(1, 1, 1)$.

Przykład 20 – układ sprzeczny

Jeżeli w przykładzie 19 trzecie równanie zmienimy na $3x + 4y + 2z = 10$, to po tych samych operacjach otrzymamy wiersz $[0 \ 0 \ 0 \ | \ 1]$, czyli $0 = 1$. $\text{rz } A = 2 \neq \text{rz}[A | B] = 3$ – układ **sprzeczny**.

8 Układy równań w technologii drewna**Definicja (wilgotność drewna)**

$$w = \frac{m - m_0}{m_0} \cdot 100\%,$$

gdzie m – masa drewna wilgotnego, m_0 – masa drewna w stanie absolutnie suchym. Stąd masa wody w drewnie wynosi $w \cdot m_0$, a masa drewna wilgotnego $m = m_0(1 + w)$ (w jako ułamek dziesiętny).

 [FK, Drewno a woda]

Przykład 21 – mieszanie zrębków o różnej wilgotności

Mieszmą zrębki świeże o wilgotności 100% z wiórami podsuszonymi o wilgotności 20%. Potrzeba 1200 kg mieszanki o wilgotności 50% (wartości przykładowe). Ile kilogramów zrębków i wiórów należy użyć?

Rozwiązanie. Sucha masa mieszanki: $m_0 = \frac{1200}{1+0,5} = 800$ kg, masa wody: $0,5 \cdot 800 = 400$ kg. Niech x , y – suche masy zrębków i wiórów [kg]. Bilans suchej masy i bilans wody:

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 1,0x + 0,2y = 400 \end{cases} \quad W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,2 \end{vmatrix} = -0,8, \quad W_x = \begin{vmatrix} 800 & 1 \\ 400 & 0,2 \end{vmatrix} = -240, \quad W_y = \begin{vmatrix} 1 & 800 \\ 1 & 400 \end{vmatrix} = -400.$$

$x = \frac{-240}{-0,8} = 300$ kg, $y = \frac{-400}{-0,8} = 500$ kg suchej masy. Masy wilgotne: zrębki $300 \cdot (1 + 1) = 600$ kg, wióry $500 \cdot (1 + 0,2) = 600$ kg: **600 kg zrębków i 600 kg wiórów**. Sprawdzenie: $600 + 600 = 1200$ kg, woda $300 + 100 = 400$ kg.

Przykład 22 – masa klejowa

Masę klejową (100 kg) przygotowujemy z żywicy (x kg, 65% suchej masy), roztworu utwardzacza (y kg, 20% s.m.) i wypełniacza (z kg, 90% s.m.). Masa ma zawierać 60 kg suchej masy, a wypełniacza ma być 4 razy mniej niż żywicy (wartości przykładowe).

Rozwiązanie. Drugie równanie mnożymy przez 20:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0,65x + 0,2y + 0,9z = 60 \\ x - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 13 & 4 & 18 & 1200 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - 13W_1, W_3 - W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -9 & 5 & -100 \\ 0 & -1 & -5 & -100 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -5 & -100 \\ 0 & -9 & 5 & -100 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 - 9W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -5 & -100 \\ 0 & 0 & 50 & 800 \end{array} \right]$$

$$z = 16, -y - 80 = -100 \Rightarrow y = 20, x = 100 - 20 - 16 = 64:$$

64 kg żywicy, 20 kg utwardzacza, 16 kg wypełniacza.

Sprawdzenie suchej masy: $0,65 \cdot 64 + 0,2 \cdot 20 + 0,9 \cdot 16 = 41,6 + 4 + 14,4 = 60$ kg.

Przykład 23 – czy plan produkcji jest jednoznaczny?

W przykładzie 16 zmieniamy szafkę: zużywa ona 3 m² płyty, 4 m² okleiny i 7 h pracy, czyli dokładnie tyle, co stół i krzesło razem. Zasoby: 120 m² płyty, 150 m² okleiny, 300 h.

Rozwiązanie.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \det A = (14 + 27 + 16) - (12 + 24 + 21) = 0$$

– wzorów Cramera nie można zastosować (kolumna 3 = kolumna 1 + kolumna 2). Metoda Gaussa (najpierw $W_2 - W_1$, $W_3 - 2W_1$, potem zamiana kolejności wierszy):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 120 \\ 3 & 1 & 4 & 150 \\ 4 & 3 & 7 & 300 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - W_1, W_3 - 2W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 - W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rz } A = \text{rz}[A | B] = 2 < 3$ – układ nieoznaczony: $x_3 = t$, $x_2 = 60 - t$, $x_1 = 30 - t$,

$(x_1, x_2, x_3) = (30 - t, 60 - t, t)$. Ze względu na sens zadania t jest liczbą całkowitą z

przedziału $\langle 0; 30 \rangle$, np. $(30, 60, 0)$, $(10, 40, 20)$, $(0, 30, 30)$ – jedną szafkę można „zamienić” na stół i krzesło bez zmiany zużycia zasobów. Plan jest wyznaczony jednoznacznie przez zużycie zasobów tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

★ Zapamiętaj

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; stopień 3 – Sarrus; wyższe – Laplace ($D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$) lub postać trójkątna. $W_i \leftrightarrow W_j$: zmiana znaku; $W_i \rightarrow W_i + cW_j$: bez zmian.
 A^{-1} istnieje $\iff \det A \neq 0$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T$; $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$; $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$,
 $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.
 Kronecker–Capelli: rozwiązanie istnieje $\iff \text{rz } A = \text{rz}[A \mid B]$; $= n - \text{jedno}$, $= r < n$ – nieskończenie wiele ($n - r$ parametrów).
 Cramer ($W \neq 0$): $x_j = W_j/W$; $X = A^{-1}B$; Gauss – dla każdego układu: postać schodkowa i podstawianie wstecz.

Literatura

- [MS]** A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
[GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
[BG] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
[K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.
[FK] F. Krzysik, *Nauka o drewnie*, PWN, Warszawa 1974.

Znacznik **[klucz, miejsce]** przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.