

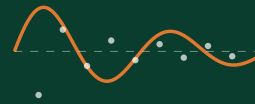
Streszczenie wykładu 9

Całka nieoznaczona. Metody całkowania

Funkcja pierwotna • całka nieoznaczona i jej interpretacja geometryczna • własności i wzory podstawowe • całkowanie wprost, przez podstawienie i przez części

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Całkowanie jest działaniem **odwrotnym** do różniczkowania: znając $f(x)$, szukamy funkcji $F(x)$, której pochodna jest równa $f(x)$.

Definicja (funkcja pierwotna)

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) nazywamy każdą funkcję $F(x)$ taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

[F2, Całka nieoznaczona]

Twierdzenie

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to $F + C$ ($C \in \mathbb{R}$) też jest jej funkcją pierwotną. Dwie funkcje pierwotne tej samej funkcji różnią się o stałą.

[F2, Całka nieoznaczona]

Definicja (całka nieoznaczona)

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ nazywamy wyrażenie

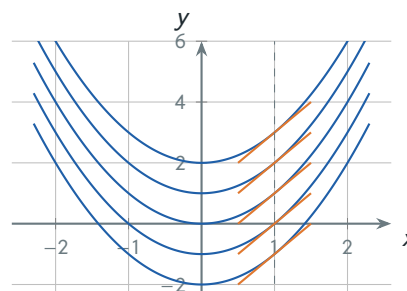
$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie} \quad F'(x) = f(x),$$

$f(x)$ – funkcja podcałkowa, $F(x)$ – funkcja pierwotna, C – stała całkowania.

[GS, Całki nieoznaczone]

Interpretacja geometryczna. Wykresy wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f powstają z jednego z nich przez przesunięcie wzdłuż osi Oy . W punktach o tej samej odciętej styczne do tych wykresów są równoległe – mają współczynnik kierunkowy $f(x)$. [F2, Całka nieoznaczona]

Np. $\int 2x dx = x^2 + C$: wszystkie parabole $y = x^2 + C$ mają w punkcie $x = 1$ styczne o nachyleniu 2.



Rys. 1. Rodzina funkcji pierwotnych $y = x^2 + C$.

2 Własności i wzory podstawowe

Twierdzenie (własności całki nieoznaczonej)

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$
- $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$ – każdy wynik można sprawdzić przez różniczkowanie.

 [GS, Całki nieoznaczone]

Podstawowe wzory rachunku całkowego

$$\begin{array}{lll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 & \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int e^x dx = e^x + C \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & \int \cos x dx = \sin x + C & \int \sin x dx = -\cos x + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C & \end{array}$$

 [GS, Całki nieoznaczone]

★ Zapamiętaj

Całka iloczynu **nie jest** iloczynem całek, a całka ilorazu **nie jest** ilorazem całek:

$$\int f(x)g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx, \quad \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}.$$

3 Całkowanie wprost

Całkowanie wprost polega na takim przekształceniu funkcji podcałkowej (rozbić na sumę, zamiana pierwiastków na potęgi, skrócenie ułamka), aby można było zastosować własności 1-2 i wzory podstawowe.

Przykład 1

$$\begin{aligned} \int (\sin x - e^x) dx &= -\cos x - e^x + C, & \int \left(3x^2 - \frac{1}{2x} \right) dx &= x^3 - \frac{1}{2} \ln |x| + C \\ \int \frac{x(\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int (x^{5/4} - x^{37/12}) dx = \frac{4}{9} x^{9/4} - \frac{12}{49} x^{49/12} + C \end{aligned}$$

4 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie (całkowanie przez podstawienie)

Jeżeli funkcja $t = g(x)$ ma ciągłą pochodną, a funkcja f jest ciągła na zbiorze wartości funkcji g , to

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony podstawiamy $t = g(x)$.

 [GS, Całki nieoznaczone]

Schemat: wybieramy $t = g(x)$ (zwykle funkcję wewnętrzną), obliczamy $dt = g'(x) dx$, zamieniamy całą całkę na zmienną t , całkujemy i wracamy do zmiennej x .

Przykład 2

$$\begin{aligned} \int x e^{x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \\ \int \sin x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{1}{2} \sin^2 x + C \\ \int \frac{\ln x}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int t dt = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \end{aligned}$$

Przykład 3 – licznik jest pochodną mianownika

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C, \quad \int \frac{x^2 + 2x + 6}{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x} dx = \ln \left| \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x \right| + C.$$

5 Całkowanie przez części

Twierdzenie (całkowanie przez części)

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

[GS, Całki nieoznaczone]

Wzór wynika z całkowania wzoru na pochodną iloczynu $(fg)' = f'g + fg'$. Za f wybieramy funkcję, która po zróżniczkowaniu się upraszcza (np. x , $\ln x$), a za g' – funkcję łatwą do scałkowania (np. e^x , $\sin x$, $\cos x$, 1).

Przykład 4

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} f = x \quad g' = e^x \\ f' = 1 \quad g = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + C$$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} f = \ln x \quad g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} \quad g = x \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

Przykład 5 – całka „pętająca się”

Dla $I = \int e^x \cos x dx$ dwukrotne całkowanie przez części daje $I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$, więc

$$2I = e^x (\cos x + \sin x) + C \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

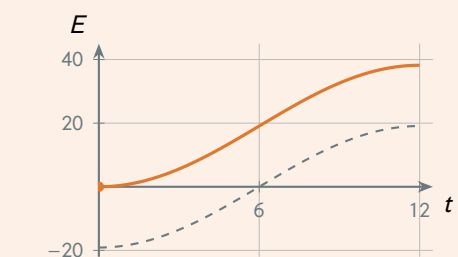
6 Zastosowanie: od mocy do energii

Przykład 6

Moc instalacji PV wynosi $P(t) = 5 \sin \frac{\pi t}{12}$ [kW]. Energia jest funkcją pierwotną mocy ($E' = P$):

$$E(t) = \int P(t) dt = -\frac{60}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} + C.$$

Stałą C wyznaczamy z warunku początkowego $E(0) = 0$: $C = \frac{60}{\pi}$, zatem $E(t) = \frac{60}{\pi} (1 - \cos \frac{\pi t}{12})$ [kWh].



Rys. 2. Funkcje pierwotne dla $C = 0$ (przerwana) i $C = \frac{60}{\pi}$.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [F2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. II, PWN, Warszawa 2005.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.