

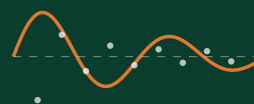
Streszczenie wykładu 10

Wyznaczniki i ich własności

Definicja wyznacznika • wyznacznik stopnia 2 i 3 (reguła Sarrusa) • minor, dopełnienie algebraiczne • rozwinięcie Laplace'a • własności wyznaczników • operacje elementarne, postać trójkątna • macierz osobliwa • pole trójkąta, współliniowość punktów

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Definicja wyznacznika

Definicja (dopełnienie algebraiczne)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Przez A_{ij} oznaczamy macierz stopnia $n - 1$ powstałą z A przez **skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny**; jej wyznacznik $\det A_{ij}$ nazywamy **minorem**. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

[MS, Wyznaczniki]

Definicja (wyznacznik)

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej A nazywamy liczbę $\det A$ (oznaczaną też $|A|$) określoną indukcyjnie:

- ▶ jeżeli $A = [a_{11}]$ (stopień 1), to $\det A = a_{11}$;
- ▶ jeżeli A ma stopień $n \geq 2$, to $\det A = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots + a_{1n}D_{1n}$ (rozwinięcie względem pierwszego wiersza).

Wyznacznik określony jest **tylko dla macierzy kwadratowych**.

[MS, Wyznaczniki]

Wyznacznik stopnia 2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

[MS, Wyznaczniki]

Przykład 1

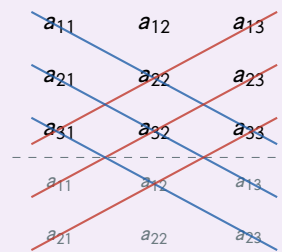
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-4) \cdot (-1) = 24 - 4 = \boxed{20}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = \boxed{0}.$$

Wyznacznik stopnia 3 – reguła Sarrusa

Pod wyznacznikiem dopisujemy jego dwa pierwsze wiersze. Iloczyny elementów na trzech przekątnych „w dół w prawo” bierzemy ze znakiem +, a na trzech przekątnych „w dół w lewo” – ze znakiem –:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Reguła Sarrusa dotyczy **wyłącznie** wyznaczników stopnia 3.



Rys. 1. + i – w regule Sarrusa.

[MS, Wyznaczniki]

Przykład 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2) = 15 - 18 = -3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 2 + 0) - (-3 + 0 - 2) = 5 + 5 = 10.$$

Twierdzenie (rozwinięcie Laplace'a)

Wyznacznik macierzy stopnia n można obliczyć, rozwijając go względem **dowolnego** wiersza lub **dowolnej** kolumny:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in} \quad (i\text{-ty wiersz}),$$

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj} \quad (j\text{-ta kolumna}).$$

Najwygodniej wybrać wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer. Znaki $(-1)^{i+j}$ tworzą

„szachownicę” $\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \end{bmatrix}.$

[MS, Wyznaczniki]

Przykład 3 – dopełnienia algebraiczne

Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ obliczamy dopełnienia algebraiczne elementów pierwszego wiersza:

$$D_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad D_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad D_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Rozwinięcie względem 1. wiersza: $\det A = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-7) + 2 \cdot 1 = 12$.

Pełna macierz dopełnień: $[D_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ (przyda się w wykładzie 11).

Przykład 4 – wyznacznik stopnia 4

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{2. kolumna}}{=} 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot [(8+0+3) - (6+0+2)] = -3 \cdot 3 = -9.$$

W 2. kolumnie tylko element $a_{32} = 3$ jest niezerowy, więc pozostałe składniki rozwinięcia są równe zero.

2 Własności wyznaczników

Twierdzenie (własności wyznaczników)

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n .

1. $\det A^T = \det A$; dlatego każda własność dotycząca wierszy jest prawdziwa także dla kolumn.
2. Jeżeli macierz ma wiersz (kolumnę) złożony z samych zer, to $\det A = 0$.
3. Zamiana miejscami dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika.
4. Jeżeli dwa wiersze (kolumny) są równe lub proporcjonalne, to $\det A = 0$.
5. Pomnożenie wiersza (kolumny) przez liczbę c mnoży wyznacznik przez c ; w szczególności $\det(cA) = c^n \det A$.
6. Dodanie do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez dowolną liczbę nie zmienia wyznacznika.
7. Wyznacznik macierzy trójkątnej (w tym diagonalnej) jest równy iloczynowi elementów przekątnej głównej; $\det I = 1$.
8. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (twierdzenie Cauchy'ego).
9. Na ogół $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

 [MS, Własności wyznaczników]

Przykład 5

- a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$ (wiersz 2 jest równy podwojonemu wierszowi 1); b) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;
- c) jeżeli $\det A = 5$ i A jest stopnia 3, to $\det(2A) = 2^3 \cdot 5 = 40$, $\det A^T = 5$, $\det(A^2) = 5 \cdot 5 = 25$.

Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) i ich wpływ na wyznacznik

- | | | |
|------------------------------|---|-------------------------|
| $W_i \leftrightarrow W_j$ | zamiana wiersza i -tego z j -tym | wyznacznik zmienia znak |
| $W_i \rightarrow cW_i$ | pomnożenie wiersza i przez $c \neq 0$ | wyznacznik razy c |
| $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ | dodanie do wiersza i wiersza j razy c | wyznacznik bez zmian |
- Analogiczne operacje na kolumnach oznaczamy $K_i \leftrightarrow K_j$, $K_i \rightarrow cK_i$, $K_i \rightarrow K_i + cK_j$.

 [GuS, Wyznaczniki]

Operacjami $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ sprowadzamy macierz do **postaci trójkątnej** (zera pod przekątną), a następnie korzystamy z własności 7.

Przykład 6 – sprowadzanie do postaci trójkątnej

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ W_2 - 2W_1 \\ W_3 - W_1 \\ W_4 - 3W_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ W_3 - 2W_2 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 2 = \boxed{-6}.$$

Definicja (macierz osobliwa i nieosobliwa)

Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, gdy $\det A \neq 0$, oraz **osobliwą**, gdy $\det A = 0$.

 [MS, Wyznaczniki]

Przykład 7

Dla jakich x macierz $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}$ jest osobliwa?

Rozwiązanie. $\det = x(x+1) - 6 = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ lub } x = 2$.

3 Zastosowania geometryczne**Pole trójkąta, współliniowość punktów**

Wartość bezwzględna wyznacznika $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ jest polem równoległoboku rozpiętego na wektorach $[a_1, a_2]$ i $[b_1, b_2]$. Stąd pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$P = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right|.$$

Punkty A, B, C leżą na jednej prostej $\iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

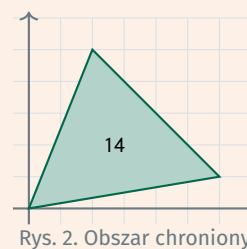
 [MS, Wyznaczniki – interpretacja geometryczna]

Przykład 8 – obszar chroniony

Obszar chroniony ma kształt trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(6, 1)$, $C(2, 5)$ (współrzędne w km).

Rozwiązanie. $\overrightarrow{AB} = [6, 1]$, $\overrightarrow{AC} = [2, 5]$,

$$P = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |30 - 2| = 14 \text{ km}^2.$$



Rys. 2. Obszar chroniony.

Przykład 9 – studnie obserwacyjne

Czy studnie o współrzędnych $(1, 2)$, $(3, 6)$, $(5, 10)$ leżą na jednej prostej?

Rozwiązanie. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 10 + 30) - (30 + 10 + 6) = 0$ – tak (prosta $y = 2x$).

★ Zapamiętaj

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; stopień 3 – Sarrus; wyższe stopnie – Laplace ($D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$) lub postać trójkątna.

$W_i \leftrightarrow W_j$: zmiana znaku; $W_i \rightarrow W_i + cW_j$: bez zmian; wiersze proporcjonalne $\Rightarrow \det A = 0$; $\det(AB) = \det A \det B$.

Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
[GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
[BG] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
[K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.