

Streszczenie wykładu 10

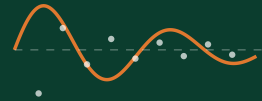
Całkowanie funkcji wymiernych i trygonometrycznych

Funkcja wymierna • ułamki proste • rozkład na ułamki proste • całkowanie ułamków prostych I i II rodzaju • całki z funkcji trygonometrycznych.

Temat egzaminacyjny – nie jest omawiany na ćwiczeniach.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Funkcja wymierna i ułamki proste

Definicja (funkcja wymierna)

Funkcję $f(x) = \frac{W_n(x)}{W_m(x)}$, gdzie W_n jest wielomianem stopnia n , a W_m – niezerowym wielomianem stopnia m , nazywamy **funkcją wymierną**. Gdy $n < m$, funkcję nazywamy **właściwą**.

[GS, Całki nieoznaczone]

Definicja (ułamki proste)

Ułamek prosty I rodzaju: $\frac{A}{(px+q)^l}$, $l \in \mathbb{N}$; **II rodzaju:** $\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^t}$, $t \in \mathbb{N}$,
 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

[GS, Całki nieoznaczone]

Twierdzenie (o rozkładzie na ułamki proste)

Każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i skończenie wielu ułamków prostych I i II rodzaju. Przy tym:

- ▶ czynnikowi $(px+q)^l$ mianownika odpowiada suma $\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \dots + \frac{A_l}{(px+q)^l}$;
- ▶ czynnikowi $(ax^2+bx+c)^t$, $\Delta < 0$, odpowiada suma $\frac{C_1x+D_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{C_tx+D_t}{(ax^2+bx+c)^t}$.

[GS, Całki nieoznaczone]

★ Zapamiętaj

Algorytm całkowania funkcji wymiernej:

1. Jeśli stopień licznika $\geq$ stopień mianownika – wydziel wielomian (dzielenie lub grupowanie):

$$f(x) = W(x) + \frac{L(x)}{M(x)}.$$
2. Rozłóż mianownik $M(x)$ na czynniki liniowe i kwadratowe z $\Delta < 0$ (postać iloczynowa trójmianu, pierwiastki wymierne – dzielniki wyrazu wolnego, twierdzenie Bézouta, dzielenie wielomianów).
3. Rozłóż $\frac{L(x)}{M(x)}$ na ułamki proste: pomnóż obie strony przez $M(x)$ i porównaj współczynniki przy jednakowych potęgach x .
4. Scałkuj wielomian i każdy ułamek prosty osobno.

2 Całkowanie ułamków prostych**Ułamki proste I rodzaju**

$$\int \frac{A}{px+q} dx = \frac{A}{p} \ln |px+q| + C, \quad \int \frac{A}{(px+q)^n} dx = \frac{A}{p} \cdot \frac{(px+q)^{1-n}}{1-n} + C, \quad n \geq 2.$$

[GS, Całki nieoznaczone]

Ułamki proste II rodzaju

Mianownik sprowadzamy do postaci kanonicznej $(x+\alpha)^2 + \beta^2$, a licznik zapisujemy jako (stała $\times$ pochodna mianownika) + stała:

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x+\alpha}{\beta} + C, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

[GS, Całki nieoznaczone]

3 Przykłady

Przykład 1 – wydzielenie wielomianu

a) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x - 4} = x^2 + 7x + 24 + \frac{84}{x - 4}$ (dzielenie), więc

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x - 4} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 24x + 84 \ln |x - 4| + C.$$

b) $\frac{x - 4}{x - 6} = \frac{x - 6 + 2}{x - 6} = 1 + \frac{2}{x - 6}$ (grupowanie), więc $\int \frac{x - 4}{x - 6} dx = x + 2 \ln |x - 6| + C.$

Przykład 2 – rozkład na ułamki I rodzaju

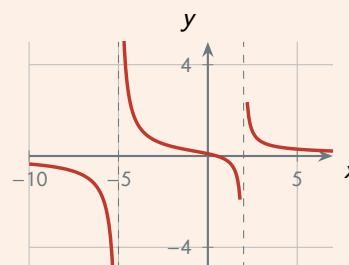
Oblicz $\int \frac{2x - 1}{x^2 + 3x - 10} dx.$

Rozwiązanie. $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$, $\frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 5)} =$

$$\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5}.$$

Stąd $2x - 1 = (A + B)x + (5A - 2B)$, czyli $A + B = 2$, $5A - 2B = -1$, $A = \frac{3}{7}$, $B = \frac{11}{7}$.

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 + 3x - 10} dx = \frac{3}{7} \ln |x - 2| + \frac{11}{7} \ln |x + 5| + C$$



Rys. 1. Funkcja podcałkowa.

Przykład 3 – czynnik wielokrotny i kwadratowy (postać rozkładu)

$M(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$: pierwiastki wymierne należą do $\{-2; -1; 1; 2\}$;

$M(1) = M(-2) = 0$; po dzieleniu $M(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x^2 + x + 1)$, więc

$$\frac{x^2 - x + 2}{M(x)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}.$$

Przykład 4 – ułamki II rodzaju

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + C.$

b) $\int \frac{3x + 7}{x^2 + 6x + 18} dx$: $3x + 7 = \frac{3}{2}(2x + 6) - 2$, $x^2 + 6x + 18 = (x + 3)^2 + 3^2$, więc

$$\int \frac{3x + 7}{x^2 + 6x + 18} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 18} dx - 2 \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 9}$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 18) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 3}{3} + C.$$

Przykład 5 – czynnik kwadratowy w potęgde

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}, \text{ stąd}$$

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 4 \operatorname{arctg} x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C.$$

4 Całkowanie funkcji trygonometrycznych**Przydatne tożsamości**

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

[GS, Funkcje elementarne]

Przykład 6 – trzy typowe sytuacje**Parzyste potęgi** $\sin x$, $\cos x$ – obniżamy potęgę:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Iloczyn $\sin ax \cos bx$ itp. – zamieniamy iloczyn na sumę:

$$\int \sin 3x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 4x) \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$$

Nieparzysta potęga – „odrywamy” jeden czynnik i podstawiamy $t = \sin x$ lub $t = \cos x$:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int (1 - t^2) \, dt = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Literatura**[F1]** G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.**[KW1]** W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.**[GS]** M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.