

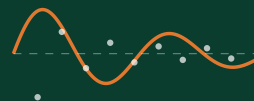
Streszczenie wykładu 11

Macierz odwrotna. Rząd macierzy

Macierz odwrotna: definicja, warunek istnienia • metoda dopełnień algebraicznych • metoda Gaussa–Jordana • własności, równania macierzowe • liniowa niezależność wektorów • rząd macierzy, operacje elementarne, postać schodkowa

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Macierz odwrotna

Definicja (macierz odwrotna)

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Macierz A^{-1} nazywamy **macierzą odwrotną** do macierzy A , jeżeli

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

[MS, Macierz odwrotna]

Twierdzenie (warunek istnienia, wzór)

Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy A jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$). Macierz odwrotna jest wtedy wyznaczona jednoznacznie oraz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T, \quad D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Macierz $[D_{ij}]^T$ nazywamy **macierzą dołączoną** do A .

[MS, Macierz odwrotna]

Macierz odwrotna stopnia 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0.$$

[MS, Macierz odwrotna]

Algorytm – metoda dopenień algebraicznych

1. Obliczamy $\det A$. Jeżeli $\det A = 0$, macierz odwrotna nie istnieje – koniec.
2. Obliczamy wszystkie dopełnienia algebraiczne $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ i tworzymy macierz $[D_{ij}]$.
3. Transponujemy ją i dzielimy przez wyznacznik: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T$.
4. Sprawdzamy: $A \cdot A^{-1} = I$.

 [MS, Macierz odwrotna]

Przykład 1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}: \det A = 8 - 3 = 5, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sprawdzenie: } \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 - 0,6 & -0,8 + 0,8 \\ 1,2 - 1,2 & -0,6 + 1,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ nie ma odwrotnej, bo jej wyznacznik jest równy 0.

Przykład 2 – macierz stopnia 3

$$\text{Wyznacz macierz odwrotną do } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. 1. Reguła Sarrusa: $\det A = (-2 - 4 - 2) - (-1 - 4 - 4) = -8 + 9 = 1 \neq 0$.

2. Dopełnienia algebraiczne:

$$\begin{aligned} D_{11} &= + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, & D_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, & D_{13} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \\ D_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & D_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & D_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ D_{31} &= + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, & D_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, & D_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

$$3. [D_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{1} [D_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sprawdzenie: $AA^{-1} = I_3$.

Metoda Gaussa–Jordana (operacji elementarnych)

Tworzymy macierz $[A | I]$ (macierz A uzupełniona z prawej strony macierzą jednostkową). Wykonując operacje elementarne **wyłącznie na wierszach** ($W_i \leftrightarrow W_j$, $W_i \rightarrow cW_i$ dla $c \neq 0$, $W_i \rightarrow W_i + cW_j$), przekształcamy lewą część w macierz jednostkową. Prawa część staje się wtedy macierzą odwrotną:

$$[A | I] \longrightarrow [I | A^{-1}].$$

Jeżeli w lewej części pojawi się wiersz zerowy, to $\det A = 0$ i macierz odwrotna nie istnieje.

 [GuS, Macierz odwrotna]

Przykład 3

Macierz z przykładu 2 metodą Gaussa–Jordana:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} W_1 + W_2 \\ W_2 - 2W_1 \\ W_3 - W_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} W_1 - 3W_3 \\ W_2 - 2W_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Twierdzenie (własności macierzy odwrotnej)

Jeżeli A i B są nieosobliwymi macierzami stopnia n oraz $c \neq 0$, to:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$; 2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; 4. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$; 5.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

 [MS, Macierz odwrotna]

Równania macierzowe

Jeżeli A jest nieosobliwa, to: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (mnożymy obie strony przez A^{-1} **z lewej**); $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (**z prawej**).

Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne, kolejność czynników jest istotna.

 [MS, Macierz odwrotna]

Przykład 4

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}: \det = 1, A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, X = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}.$$

$$\text{b) } AX - A = 2X \Rightarrow AX - 2X = A \Rightarrow (A - 2I)X = A \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}A \text{ (o ile } \det(A - 2I) \neq 0).$$

Przykład 5 – emisje ze źródeł (zadanie odwrotne)

Stężenia na dwóch stacjach $\mathbf{c}$ [$\mu\text{g}/\text{m}^3$] zależą od emisji dwóch źródeł $\mathbf{q}$ [t/doba]: $\mathbf{c} = A\mathbf{q}$,

$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}$. Zmierzono $\mathbf{c} = [9, 8]^T$.

Rozwiązanie. $\det A = 0,1$, $A^{-1} = \frac{1}{0,1} \begin{bmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = A^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 27 - 8 \\ -18 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \end{bmatrix}$

t/doba.

2 Rząd macierzy**Definicja (liniowa niezależność)**

Wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeżeli jedynym rozwiązaniem równania

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

jest $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Jeżeli równanie ma inne rozwiązanie, wektory są **liniowo zależne** – wtedy co najmniej jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

 [MS, Przestrzenie liniowe]

Przykład 6

Wektory $[1, 2, 3]$ i $[2, 4, 6]$ są liniowo zależne: $2 \cdot [1, 2, 3] - 1 \cdot [2, 4, 6] = \mathbf{0}$. Wersory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są liniowo niezależne: $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} = [c_1, c_2, c_3] = \mathbf{0}$ tylko dla $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Definicja (rząd macierzy)

Rzędem macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy (lub – równoważnie – kolumn) tej macierzy; oznaczamy go $\text{rz } A$.

Równoważnie: rząd macierzy jest równy najwyższemu stopniowi jej niezerowego **minora**, czyli wyznacznika podmacierzy kwadratowej otrzymanej przez skreślenie pewnych wierszy i kolumn.

 [MS, Rząd macierzy]

Własności rzędu

$0 \leq \text{rz } A \leq \min(m, n)$ dla A wymiaru $m \times n$; $\text{rz } A = 0 \iff A = \mathbf{0}$; $\text{rz } A^T = \text{rz } A$;
dla macierzy kwadratowej stopnia n : $\text{rz } A = n \iff \det A \neq 0$.

 [MS, Rząd macierzy]

Twierdzenie (operacje nie zmieniające rzędu)

Rząd macierzy nie zmienia się, gdy: 1) zamieniamy miejscami dwa wiersze (kolumny), $W_i \leftrightarrow W_j$; 2) mnożymy wiersz (kolumnę) przez liczbę różną od zera, $W_i \rightarrow cW_i$; 3) dodajemy do wiersza (kolumny) inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę, $W_i \rightarrow W_i + cW_j$; 4) skreślamy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer; 5) skreślamy wiersz (kolumnę) równy lub proporcjonalny do innego wiersza (kolumny); 6) transponujemy macierz.

 [GuS, Rząd macierzy]

Algorytm – postać schodkowa

Operacjami elementarnymi tworzymy zera pod pierwszym niezerowym elementem kolejnych wierszy (postać **schodkowa**). Rząd macierzy jest równy liczbie **niezerowych wierszy** postaci schodkowej.

 [GuS, Rząd macierzy]

Przykład 7 – rząd równy 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} W_2 - 2W_1 \\ W_3 - 3W_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ W_3 - W_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rz} = \boxed{2}.$$

Sprawdzenie minorem: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, a wszystkie minory stopnia 3 są zerowe (wiersz 3 = wiersz 1 + wiersz 2).

Przykład 8 – rząd równy 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} W_2 - W_1 \\ W_3 - W_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ W_3 - 2W_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rz} = \boxed{3}.$$

Wiersze (i kolumny) tej macierzy są liniowo niezależne; jej wyznacznik jest różny od zera ($\det = 1$).

Przykład 9 – rząd przez minory

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}: \det A = 0 \text{ (wiersze 1 i 2 proporcjonalne)}, \text{ ale minor } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ zatem} \\ \text{rz } A = 2.$$

★ Zapamiętaj

A^{-1} istnieje $\iff \det A \neq 0$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T$; $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$; $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

$\text{rz } A$ = maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy = liczba niezerowych wierszy postaci schodkowej.

Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
 [GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
 [BG] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
 [K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.