

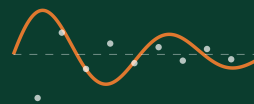
Streszczenie wykładu 11

Całka oznaczona i jej zastosowania

Suma całkowa Riemanna • całka oznaczona • twierdzenie Newtona–Leibniza • własności • podstawienie i całkowanie przez części • pole, objętość, długość łuku • zastosowania fizyczne

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Całka oznaczona Riemanna

Definicja (suma całkowa)

Niech $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – dowolnymi punktami pośrednimi. Sumę

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

nazywamy **sumą całkową Riemanna**. Ciąg podziałów jest **normalny**, gdy $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$.

[F2, Całka oznaczona]

Definicja (całka oznaczona)

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów i dowolnego wyboru punktów pośrednich ciąg (S_n) ma tę samą granicę właściwą, to granicę tę nazywamy **całką oznaczoną** funkcji f na $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

a – dolna, b – górna granica całkowania. Całka oznaczona jest **liczbą**.

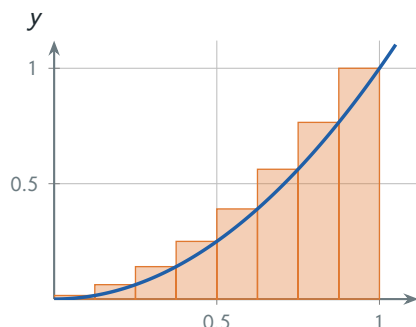
[F2, Całka oznaczona]

Twierdzenie (całkowalność)

Funkcja ciągła na $[a, b]$ jest na nim całkowalna. Całkowalna jest też funkcja ograniczona o skończenie wielu punktach nieciągłości.

[GS, Całki oznaczone]

Interpretacja geometryczna. Dla $f \geq 0$ całka $\int_a^b f(x) dx$ jest polem obszaru pod wykresem f nad przedziałem $[a, b]$. [GS, Zastosowania całek oznaczonych]



Rys. 1. Suma Riemanna dla $f(x) = x^2$, $n = 8$: $S_8 \approx 0,398$; $S_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

2 Twierdzenie Newtona–Leibniza i własności

Twierdzenie (Newtona–Leibniza)

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$, a F jest dowolną jej funkcją pierwotną, to

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

[GS, Całki oznaczone]

Przykład 1

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} & \int_0^\pi \sin x dx &= \left[-\cos x \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2 \\ \int_1^e \frac{dx}{x} &= \left[\ln x \right]_1^e = 1 & \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 1) dx &= \left[x^3 - x^2 + x \right]_{-1}^2 = 6 - (-3) = 9 \end{aligned}$$

Twierdzenie (własności całki oznaczonej)

liniowość: $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx$

addytywność: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b$

zamiana granic: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0$

monotoniczność: $f \leq g$ na $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

symetria: f nieparzysta: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$; f parzysta: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

[GS, Całki oznaczone]

Twierdzenie (o wartości średniej)

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$, to istnieje $c \in [a, b]$ takie, że $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$. Liczbę

$f_{\text{sr}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ nazywamy **wartością średnią** funkcji f na $[a, b]$.

[GS, Całki oznaczone]

3 Metody obliczania całek oznaczonych

Podstawienie i całkowanie przez części

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt, \quad \int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

[GS, Całki oznaczone]

★ **Zapamiętaj**

Przy podstawieniu w całce oznaczonej **zmieniamy granice całkowania** (z x na t) – nie wracamy do zmiennej x .

Przykład 2

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| dt = 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} [e^t]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} f = x \quad g' = e^{-x} \\ f' = 1 \quad g = -e^{-x} \end{array} \right| = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + (1 - e^{-1}) = 1 - \frac{2}{e}$$

4 Zastosowania geometryczne

Pole, objętość, długość łuku

- ▶ pole pod wykresem: $P = \int_a^b |f(x)| dx$ (gdy f zmienia znak – dzielimy przedział w miejscach zerowych),
- ▶ pole między krzywymi ($f \leq g$ na $[a, b]$): $P = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$,
- ▶ objętość bryły obrotowej: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ (obróć wokół Ox), $V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$ (wokół Oy , $x = g(y)$),
- ▶ długość łuku: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

[GS, Zastosowania całek oznaczonych]

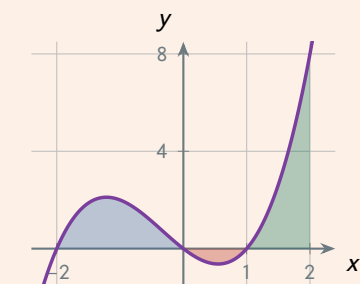
Przykład 3 – funkcja zmieniająca znak

Pole obszaru między krzywą $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ a osią Ox dla $x \in [-2, 2]$.

Rozwiązanie. $f(x) = x(x-1)(x+2)$, miejsca zerowe $-2, 0, 1$; $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$.

$$P = \int_{-2}^0 f dx - \int_0^1 f dx + \int_1^2 f dx = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \boxed{\frac{37}{6}}$$

Uwaga: $\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{16}{3} \neq P$.



Rys. 2. Pole pod osią liczymy z minusem.

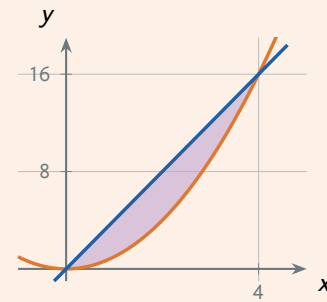
Przykład 4 – pole między krzywymi

Pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$ i $y = 4x$.

Rozwiązanie. Punkty przecięcia: $x^2 = 4x \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$.

Na $[0, 4]$ mamy $4x \geq x^2$, więc

$$P = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$$



Rys. 3. Obszar między $y = 4x$ i $y = x^2$.

Przykład 5 – objętość i długość łuku

a) Obrót obszaru pod prostą $y = 2x$, $x \in [1, 4]$, wokół osi Ox :

$$V = \pi \int_1^4 (2x)^2 dx = 4\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \boxed{84\pi}.$$

b) Obrót obszaru między prostą $x = \frac{y}{2}$ a osią Oy , $y \in [2, 4]$, wokół osi Oy :

$$V = \pi \int_2^4 \frac{y^2}{4} dy = \boxed{\frac{14\pi}{3}}.$$

c) Długość łuku $f(x) = 3x^{2/3} - 10$ od $A(8, 2)$ do $B(27, 17)$: $f'(x) = 2x^{-1/3}$, podstawienie $t = x^{2/3} + 4$:

$$L = \int_8^{27} \sqrt{1 + 4x^{-2/3}} dx = \int_8^{27} x^{-1/3} \sqrt{x^{2/3} + 4} dx = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{t} dt = \boxed{13\sqrt{13} - 16\sqrt{2} \approx 24,24}$$

5 Zastosowania fizyczne

Jeżeli $Q'(t) = q(t)$, to $Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt$. W szczególności: [HRW, Ruch prostoliniowy; Praca i energia kinetyczna]

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \text{ (droga)}, \quad E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \text{ (energia)}, \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \text{ (praca)}.$$

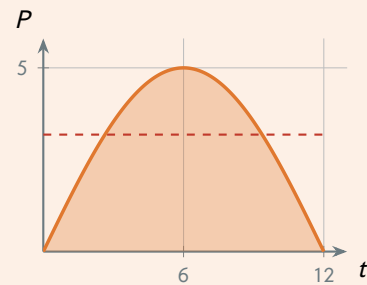
Przykład 6 – ekoenergetyka

Moc instalacji PV: $P(t) = 5 \sin \frac{\pi t}{12}$ [kW], $t \in [0, 12]$ [h].

Energia wyprodukowana w ciągu dnia:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{12} 5 \sin \frac{\pi t}{12} dt = \left[-\frac{60}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} \right]_0^{12} \\ &= \frac{120}{\pi} \approx 38,2 \text{ kWh} \end{aligned}$$

Moc średnia: $P_{\text{sr}} = \frac{E}{12} = \frac{10}{\pi} \approx 3,18$ kW.



Rys. 4. Energia = pole pod wykresem mocy; linia przerywana – moc średnia.

Przykład 7 – praca siły sprężystości

Siła potrzebna do rozciągnięcia sprężyny o x wynosi $F(x) = kx$ (prawo Hooke'a [HRW, Praca i energia kinetyczna]). Praca rozciągnięcia od 0 do x_0 : $W = \int_0^{x_0} kx dx = \frac{kx_0^2}{2}$.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [F2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. II, PWN, Warszawa 2005.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 1, PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.