

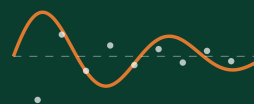
Streszczenie wykładu 12

Układy równań liniowych

Układ równań liniowych, zapis macierzowy, macierz rozszerzona • układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny • twierdzenie Kroneckera–Capellego • wzory Cramera • metoda macierzy odwrotnej • metoda eliminacji Gaussa • zastosowania: nawozy, model mieszania

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Podstawowe pojęcia

Definicja (układ równań liniowych)

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ są **współczynnikami**, $b_i \in \mathbb{R}$ – **wyrazami wolnymi**, a $x_1, \dots, x_n$ – **niewiadomymi**. Jeżeli $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, układ nazywamy **jednorodnym**, w przeciwnym razie – **niejednorodnym**. **Rozwiązaniem** układu jest każdy ciąg liczb $(x_1, \dots, x_n)$ spełniający wszystkie równania.

[MS, Układy równań liniowych]

Definicja (zapis macierzowy)

Układ zapisujemy w postaci $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad [A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

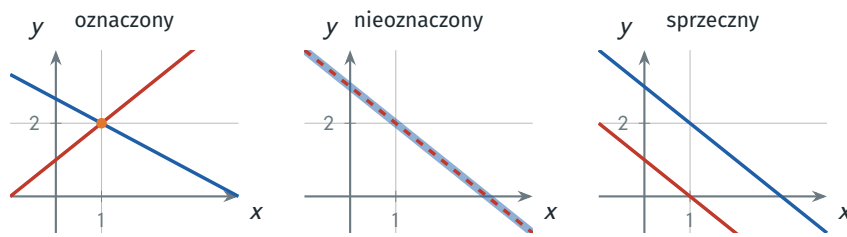
A – **macierz układu** (macierz współczynników), B – **wektor wyrazów wolnych**, $[A | B]$ – **macierz rozszerzona** (uzupełniona).

[MS, Układy równań liniowych]

Definicja (rodzaje układów)

Układ nazywamy **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie; **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań; **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań. Innych możliwości nie ma.

[MS, Układy równań liniowych]



Rys. 1. Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi – dwie proste: przecinające się, pokrywające się, równoległe.

Twierdzenie (Kroneckera–Capellego)

Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej: $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B]$. Ponadto, jeśli n jest liczbą niewiadomych, to:

- ▶ $\text{rz } A \neq \text{rz}[A \mid B] \Rightarrow$ układ **sprzeczny**;
- ▶ $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B] = n \Rightarrow$ układ **oznaczony**;
- ▶ $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B] = r < n \Rightarrow$ układ **nieoznaczony**; rozwiązania zależą od $n - r$ parametrów.

[MS, Układy równań liniowych]

2 Układy Cramera**Definicja (układ Cramera)**

Układ $AX = B$, w którym macierz A jest **kwadratowa** (liczba równań = liczba niewiadomych) i **niesobliwa** ($\det A \neq 0$), nazywamy **układem Cramera**. Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie.

[MS, Układy Cramera]

Twierdzenie (wzory Cramera)

Rozwiązanie układu Cramera dane jest wzorami

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{W_n}{W},$$

gdzie $W = \det A$, a W_j jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy A przez zastąpienie jej j -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

[MS, Układy Cramera]

Algorytm – metoda Cramera

1. Sprawdzamy, czy macierz A jest kwadratowa, i obliczamy $W = \det A$. Jeżeli $W = 0$, metody nie można zastosować.
2. Obliczamy wyznaczniki $W_1, \dots, W_n$ (w j -tej kolumnie wpisujemy wyrazy wolne).
3. Wyznaczamy $x_j = W_j / W$. 4. Sprawdzamy rozwiązanie, podstawiając je do wszystkich równań.

[MS, Układy Cramera]

Przykład 1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases} : \quad W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad W_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad W_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -10; \quad x = \frac{-5}{-5} = 1, \\ y = \frac{-10}{-5} = 2.$$

Przykład 2

Rozwiąż układ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ metodą Cramera.

Rozwiązanie.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 2 - 12) - (9 + 1 + 8) = -29 \neq 0, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -29,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -58, \quad W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -87;$$

$$x_1 = \frac{-29}{-29} = 1, \quad x_2 = \frac{-58}{-29} = 2, \quad x_3 = \frac{-87}{-29} = 3.$$

Rozwiązanie: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$. Sprawdzenie: $1 + 4 + 9 = 14$, $4 + 6 - 3 = 7$, $1 - 2 + 3 = 2$.

Metoda macierzy odwrotnej

Dla układu Cramera: $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

1. Sprawdzamy, że $\det A \neq 0$; **2.** wyznaczamy A^{-1} (wykład 11); **3.** obliczamy $X = A^{-1}B$; **4.** sprawdzamy rozwiązanie.

 [MS, Układy Cramera]

Przykład 3

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad . \quad \text{Macierz układu jest macierzą z przykładu 2 wykładu 11: } \det A = 1,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 7 - 9 \\ 0 + 7 - 6 \\ -2 + 0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3 Metoda eliminacji Gaussa

Operacje elementarne na układzie

Zbiór rozwiązań układu nie zmienia się, gdy na wierszach macierzy rozszerzonej $[A | B]$ wykonujemy operacje:

- ▶ $W_i \leftrightarrow W_j$ – zamiana miejscami dwóch równań;
- ▶ $W_i \rightarrow cW_i, c \neq 0$ – pomnożenie równania przez liczbę różną od zera;
- ▶ $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ – dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę.

Można też skreślić równanie postaci $0 = 0$ oraz równanie będące kopią (wielokrotnością) innego.

 [GuS, Metoda Gaussa]

Algorytm – metoda eliminacji Gaussa

1. Zapisujemy macierz rozszerzoną $[A | B]$.
2. **Eliminacja w przód:** operacjami elementarnymi sprowadzamy macierz do postaci schodkowej (zera pod przekątną).
3. Odczytujemy rz A i rz $[A | B]$. Wiersz postaci $[0 \dots 0 | d], d \neq 0$, oznacza układ **sprzeczny**.
4. **Podstawianie wstecz:** z ostatniego równania wyznaczamy ostatnią niewiadomą, wstawiamy do wcześniejszych itd. Gdy $r < n$, $n - r$ niewiadomych przyjmujemy za parametry.

 [GuS, Metoda Gaussa]

Przykład 4 – układ oznaczony

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - 2W_1, W_3 - W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 \leftrightarrow W_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 + 3W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right]$$

rz A = rz $[A | B]$ = 3 = n – układ oznaczony. Podstawianie wstecz: $-7z = -7 \Rightarrow z = 1$;
 $y - 2z = -3 \Rightarrow y = -1$; $x + y + z = 2 \Rightarrow x = 2$. $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Przykład 5 – układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - 2W_1, W_3 - 3W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 - W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$\text{rz } A = \text{rz}[A | B] = 2 < 3$ – układ nieoznaczony, $3 - 2 = 1$ parametr. Przyjmujemy $z = t$: $y = t$, $x = 3 - y - z = 3 - 2t$.

Rozwiązanie: $(x, y, z) = (3 - 2t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; np. dla $t = 0$: $(3, 0, 0)$, dla $t = 1$: $(1, 1, 1)$.

Przykład 6 – układ sprzeczny

Jeżeli w przykładzie 5 trzecie równanie zmienimy na $3x + 4y + 2z = 10$, to po tych samych operacjach otrzymamy wiersz $[0 \ 0 \ 0 \ | \ 1]$, czyli $0 = 1$. $\text{rz } A = 2 \neq \text{rz}[A | B] = 3$ – układ **sprzeczny**.

4 Zastosowania

Przykład 7 – dobór nawozów

Działka potrzebuje 4 kg N, 8 kg P i 8 kg K. Nawóz A zawiera 4% N, 12% P, 12% K; nawóz B – po 10% każdego składnika. Ile kg nawozów (a, b) należy użyć?

Rozwiązanie.
$$\begin{cases} 0,04a + 0,10b = 4 \\ 0,12a + 0,10b = 8 \\ 0,12a + 0,10b = 8 \end{cases} \quad ; \text{ po pomnożeniu przez 100:}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 400 \\ 12 & 10 & 800 \\ 12 & 10 & 800 \end{array} \right] \xrightarrow{W_2 - 3W_1, W_3 - 3W_1} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 400 \\ 0 & -20 & -400 \\ 0 & -20 & -400 \end{array} \right] \xrightarrow{W_3 - W_2} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 400 \\ 0 & -20 & -400 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$\text{rz } A = \text{rz}[A | B] = 2$ – jedno rozwiązanie: $b = 20$, $4a = 400 - 200$, $a = 50 \text{ kg}$, $b = 20 \text{ kg}$.

Przykład 8 – model mieszania wód

Woda w rzece jest mieszaniną wody opadowej, gruntowej i ścieków o udziałach x, y, z . Stężenia chlorków w tych źródłach wynoszą 10, 50, 30 mg/l, a siarczanów 5, 15, 40 mg/l; w rzece zmierzono 24 mg/l chlorków i 17,5 mg/l siarczanów.

Rozwiązanie. Bilans wody i obu znaczników:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 10x + 50y + 30z = 24 \\ 5x + 15y + 40z = 17,5 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 50 & 30 & 24 \\ 5 & 15 & 40 & 17,5 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ W_2 - 10W_1 \\ W_3 - 5W_1 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 40 & 20 & 14 \\ 0 & 10 & 35 & 12,5 \end{array} \right] W_3 - \frac{1}{4}W_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 40 & 20 & 14 \\ 0 & 0 & 30 & 9 \end{array} \right].$$

$$z = 0,3, \quad 40y = 14 - 6, \quad y = 0,2, \quad x = 1 - 0,2 - 0,3 = 0,5:$$

50% opad, 20% wody gruntowe, 30% ścieki.

★ Zapamiętaj

Kronecker–Capelli: rozwiązanie istnieje $\iff \text{rz } A = \text{rz}[A \mid B]; = n - \text{jedno}, = r < n - \text{nieskończenie wiele } (n - r \text{ parametrów}).$

Cramer (A kwadratowa, $W \neq 0$): $x_j = W_j/W$; $X = A^{-1}B$; Gauss – dla każdego układu: postać schodkowa i podstawianie wstecz.

Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
 [GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
 [BG] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
 [K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.