

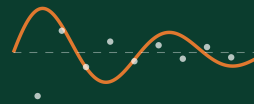
Streszczenie wykładu 12

Całka niewłaściwa

Całka niewłaściwa I rodzaju (przedział nieograniczony) • całka niewłaściwa II rodzaju (funkcja nieograniczona) • zbieżność i rozbieżność • całki wzorcowe • kryterium porównawcze • zastosowania

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



Całkę oznaczoną zdefiniowaliśmy dla funkcji **ograniczonej** na przedziale **domkniętym i ograniczonym**. Całka niewłaściwa rozszerza to pojęcie na przedziały nieograniczone (I rodzaju) i funkcje nieograniczone (II rodzaju). W obu przypadkach całkę definiujemy jako **granice** całek oznaczonych.

1 Całka niewłaściwa I rodzaju

Definicja (całka niewłaściwa I rodzaju)

Niech f będzie całkowalna na każdym przedziale $[a, T]$, $T > a$. Wtedy

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^b f(x) dx.$$

Jeżeli granica istnieje i jest **skończona**, całkę nazywamy **zbieżną**; w przeciwnym razie – **rozbieżną**.

[GS, Całki niewłaściwe]

Definicja (całka po całej prostej)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R} \text{ dowolne.}$$

Całka jest zbieżna, gdy **obie** całki po prawej stronie są zbieżne (granice liczymy niezależnie).

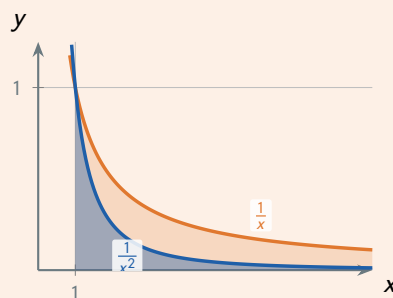
[GS, Całki niewłaściwe]

Przykład 1 – zbieżna i rozbieżna

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{T} \right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} [\ln x]_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln T = \infty$$

Pierwsza całka jest zbieżna, druga – rozbieżna, choć obie funkcje dążą do zera przy $x \rightarrow \infty$.



Rys. 1. Pole pod $\frac{1}{x^2}$ jest skończone, pod $\frac{1}{x}$ – nie.

Przykład 2 – podstawienie

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{dx}{x \ln^3 x} = -\frac{1}{2 \ln^2 x} + C,$$

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right]_{e^2}^T = 0 + \frac{1}{2 \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Przykład 3 – całka po całej prostej

$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, więc $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$ oraz

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \right]_T^0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \right]_0^T = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2},$$

zatem $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

2 Całka niewłaściwa II rodzaju

Definicja (całka niewłaściwa II rodzaju)

Jeżeli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, T]$, $a < T < b$, i nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu b (**punkt osobiwy**), to

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow b^-} \int_a^T f(x) dx;$$

analogicznie, gdy osobiwym punktem jest a : $\int_a^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow a^+} \int_T^b f(x) dx$. Gdy oba końce są osobiwe, dzielimy przedział w dowolnym punkcie $c \in (a, b)$ i badamy obie części.

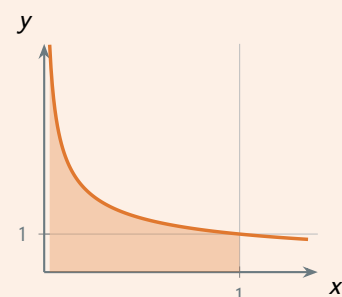
 [GS, Całki niewłaściwe]

Przykład 4

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{T \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_T^1 = \lim_{T \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{T}) = \boxed{2}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{T \rightarrow 1^-} \left[\arcsin x \right]_0^T = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{T \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{T-1} - 1 \right) = +\infty$
– rozbieżna.



Rys. 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

★ Zapamiętaj

Przed zastosowaniem wzoru Newtona–Leibniza **sprawdź, czy funkcja podcałkowa jest ograniczona na całym przedziale**. Np. „rachunek” $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$ jest błędny (całka dodatniej funkcji nie może być ujemna!): punkt 0 jest osobliwy, a całka jest rozbieżna.

3 Kryteria zbieżności

Twierdzenie (całki wzorcowe)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ jest zbieżna } \iff p > 1 \text{ (wtedy równa } \frac{1}{p-1}\text{),}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ jest zbieżna } \iff p < 1 \text{ (wtedy równa } \frac{1}{1-p}\text{).}$$

[GS, Całki niewłaściwe]

Twierdzenie (kryterium porównawcze)

Jeżeli $0 \leq f(x) \leq g(x)$ dla $x \geq a$, to ze zbieżności $\int_a^{\infty} g(x) dx$ wynika zbieżność $\int_a^{\infty} f(x) dx$, a z rozbieżności $\int_a^{\infty} f(x) dx$ – rozbieżność $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

[GS, Całki niewłaściwe]

Przykład 5

$0 < \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$ dla $x \geq 1$, a $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna, więc $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ jest **zbieżna**.

4 Zastosowania

Przykład 6 – róg Gabriela

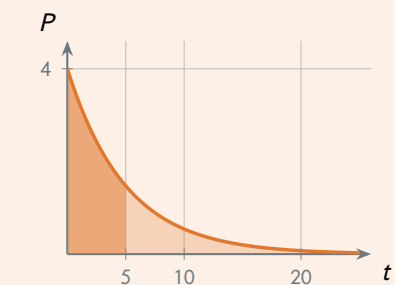
Obrót obszaru pod $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, wokół osi Ox daje bryłę o objętości $V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi$, chociaż pole obracanej figury $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ jest nieskończone.

Przykład 7 – ekoenergetyka

Magazyn ciepła po wyłączeniu zasilania oddaje moc $P(t) = P_0 e^{-\lambda t}$, $P_0 = 4 \text{ kW}$, $\lambda = 0,2 \text{ h}^{-1}$. Łączna oddana energia:

$$E = \int_0^\infty P_0 e^{-\lambda t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) = \frac{P_0}{\lambda} = 20 \text{ kWh}.$$

W ciągu pierwszych 5 h: $E_5 = 20(1 - e^{-1}) \approx 12,6 \text{ kWh}$.



Rys. 3. Energia = pole pod wykresem mocy.

Przykład 8 – fizyka

Praca potrzebna do oddalenia ciała o masie m z powierzchni Ziemi do nieskończoności (siła grawitacji $F(r) = \frac{GMm}{r^2}$ [HRW2, Grawitacja]): $W = \int_R^\infty \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{R}$ – wartość skończona.

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Krysiński, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [HRW2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 2, PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.