

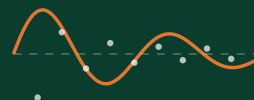
Streszczenie wykładu 13

Zastosowania algebry liniowej w ochronie środowiska

Modele postaci $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$ • model Leslie populacji z klasami wieku • wartości i wektory własne macierzy 2×2 (wersja uproszczona) • wielomian charakterystyczny, ślad i wyznacznik • tempo wzrostu i stabilna struktura wieku • macierz przejścia, stan równowagi

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Modele macierzowe w ochronie środowiska

Wiele procesów przyrodniczych opisujemy, podając **stan układu** w kolejnych chwilach (latach, dekadach) w postaci wektora $\mathbf{x}_t$. Jeżeli stan w następnym okresie zależy liniowo od stanu obecnego, to

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t, \quad \text{a stąd} \quad \mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = A^2\mathbf{x}_0, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_t = A^t\mathbf{x}_0.$$

Przykładami są: liczebność populacji w klasach wieku (model Leslie), udziały form użytkowania terenu (macierz przejścia), rozkład zanieczyszczenia między wodą, osadem i organizmami.

Definicja (macierz Leslie)

Populację samic dzielimy na n klas wieku; $x_i(t)$ – liczebność klasy i w roku t . Niech $f_i \geq 0$ oznacza **plodność** (średnią liczbę córek urodzonych w ciągu roku przez samicę z klasy i), a $s_i \in (0; 1)$ – **przeżywalność** (część osobników klasy i , które przeżyją rok i przejdą do klasy $i + 1$). Wtedy $\mathbf{x}_{t+1} = L\mathbf{x}_t$, gdzie

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dla } n = 2: \quad L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ s & 0 \end{bmatrix}.$$

Pierwszy wiersz opisuje narodziny, elementy pod przekątną – przeżywanie.

[L]

Przykład 1 – symulacja populacji

Dla $L = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$ (młode, dorosłe) i $\mathbf{x}_0 = [10, 10]^T$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10 + 1,5 \cdot 10 \\ 0,5 \cdot 10 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 25 + 7,5 \\ 12,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,5 \\ 12,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 51,25 \\ 16,25 \end{bmatrix}, \dots$$

t	0	1	2	3	7
łącznie	20	30	45	67,5	341,7
wzrost N_t/N_{t-1}	–	1,5	1,5	1,5	1,5
młode : dorosłe	1	5	2,6	3,15	3,00

Liczebność rośnie co roku 1,5 raza, a proporcja młode : dorosłe zbliża się do 3 : 1. Wyjaśniają to wartości i wektory własne macierzy L (przykład 6).

2 Wartości i wektory własne (wersja uproszczona)**Definicja (wartość własna, wektor własny)**

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Liczbę λ nazywamy **wartością własną** macierzy A , jeżeli istnieje **niezerowy** wektor $\mathbf{v}$ taki, że

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Wektor $\mathbf{v}$ nazywamy **wektorem własnym** macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ .

 [MS, Wartości własne]

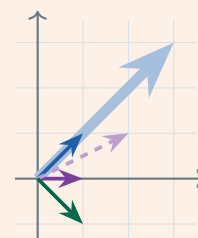
Intuicja. Mnożenie przez macierz zwykle zmienia kierunek wektora. Wektor własny jest wyjątkowy – po pomnożeniu przez A leży na tej samej prostej, a jedynie jego długość zmienia się λ razy (dla $\lambda < 0$ zmienia się też zwrot). Jeżeli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym, to każdy wektor $c\mathbf{v}$, $c \neq 0$, też nim jest – ważne są **proporcje** współrzędnych.

Przykład 2

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ – wektor $[1, 1]$ jest wektorem własnym, $\lambda = 3$.

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ – to nie jest wielokrotność $[1, 0]$, więc $[1, 0]$ nie jest wektorem własnym.

$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ – wektor własny dla $\lambda = 1$.



Rys. 1. $\mathbf{v}$ i $A\mathbf{v}$.

Twierdzenie (równanie charakterystyczne)

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$. Jest to jednorodny układ równań, który ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz jest osobliwa. Zatem

$$\lambda \text{ jest wartością własną macierzy } A \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Wielomian $W(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym**, a macierz $A - \lambda I$ – **macierzą charakterystyczną**.

 [MS, Wartości własne]

Macierz 2×2

Dla $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A.$$

Wartości własne są pierwiastkami tego trójmianu kwadratowego, przy czym

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A \quad (\text{wzory Viète'a – dobre sprawdzenie}).$$

Wartościami własnymi macierzy diagonalnej lub trójkątnej są elementy jej przekątnej.

 [MS, Wartości własne]

Algorytm (macierz 2×2)

1. Obliczamy $\text{tr } A$ i $\det A$ i rozwiązujemy równanie $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0$.
2. Dla każdej wartości λ zapisujemy układ $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$. Jego dwa równania są proporcjonalne – bierzemy jedno z nich.
3. Z tego równania wyznaczamy proporcję $v_1 : v_2$ i wybieramy wygodny wektor (np. o współrzędnych całkowitych).
4. Sprawdzamy: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

 [MS, Wartości własne]

Przykład 3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. $\text{tr } A = 6$, $\det A = 8 - 3 = 5$: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, $\Delta = 16$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ (sprawdzenie: $5 + 1 = 6$, $5 \cdot 1 = 5$).

$$\lambda_1 = 5: \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -v_1 + 3v_2 = 0, \quad v_1 = 3v_2, \quad \mathbf{v}_1 = [3, 1]; \quad A\mathbf{v}_1 = [15, 5] = 5\mathbf{v}_1.$$

$$\lambda_2 = 1: \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 = 0, \quad \mathbf{v}_2 = [1, -1]; \quad A\mathbf{v}_2 = [1, -1] = 1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Przykład 4

- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: $\text{tr } A = 3$, $\det A = 0$, $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$; wektory własne: $[1, 1]$ i $[-2, 1]$.
- b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$: $\text{tr } A = 5$, $\det A = -14 + 20 = 6$, $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$; wektory własne: $[1, 1]$ i $[4, 5]$.
- c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ (diagonalna): $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0,5$; wektory własne: $[1, 0]$ i $[0, 1]$.

💡 Uwaga

Dla macierzy większych stopni postępujemy tak samo ($\det(A - \lambda I) = 0$), ale wielomian charakterystyczny ma stopień n – w praktyce wartości własne oblicza się programami komputerowymi.

3 Interpretacja w modelach populacji i krajobrazu

Twierdzenie (zachowanie modelu Leslie po długim czasie)

Niech λ_1 będzie **dominującą** (największą) wartością własną macierzy Leslie, a $\mathbf{v}_1$ – odpowiadającym jej wektorem własnym o dodatnich współrzędnych. Po dostatecznie długim czasie:

- ▶ liczebność populacji co roku mnoży się (w przybliżeniu) przez λ_1 – jest to **tempo wzrostu populacji**;
- ▶ udziały klas wieku są proporcjonalne do współrzędnych $\mathbf{v}_1$ – **stabilna struktura wieku**.

$\lambda_1 > 1$ – populacja rośnie; $\lambda_1 = 1$ – populacja stabilna; $\lambda_1 < 1$ – populacja **wymiera**.

📖 [C, analiza asymptotyczna]

Przykład 5 – model z przykładu 1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}: \text{tr } L = 1, \det L = -0,75, \lambda^2 - \lambda - 0,75 = 0, \Delta = 4, \lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = -0,5.$$

$$\lambda_1 = 1,5: -0,5v_1 + 1,5v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_2, \mathbf{v}_1 = [3, 1].$$

Wniosek: populacja rośnie o 50% rocznie, a w stabilnej strukturze $\frac{3}{4}$ stanowią młode, $\frac{1}{4}$ – dorosłe (zgodnie z symulacją).

Przykład 6 – zagrożony gatunek

$$\text{Dla populacji ptaka: } f_1 = 0,2, f_2 = 1, s = 0,6, L = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. $\lambda^2 - 0,2\lambda - 0,6 = 0$, $\Delta = 2,44$, $\lambda_1 = \frac{0,2 + \sqrt{2,44}}{2} \approx 0,88 < 1$ – populacja maleje o ok. 12% rocznie.

Przy przeżywalności s : $\det L = -s$, równanie $\lambda^2 - 0,2\lambda - s = 0$. Warunek $\lambda = 1$: $1 - 0,2 - s = 0$, $s = 0,8$. Przeżywalność młodych trzeba zwiększyć z 60% do 80% (np. przez ochronę gniazd).

Definicja (macierz przejścia, stan równowagi)

Jeżeli $\mathbf{x}_t$ zawiera udziały kategorii (np. las, pole) w chwili t , a p_{ij} to część kategorii j , która w ciągu okresu przechodzi do kategorii i , to $\mathbf{x}_{t+1} = P\mathbf{x}_t$, gdzie $P = [p_{ij}]$ jest **macierzą przejścia** (elementy nieujemne, kolumny sumują się do 1). **Stanem równowagi** nazywamy wektor $\mathbf{v}$ spełniający $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$ – jest to wektor własny dla $\lambda = 1$, unormowany tak, aby suma współrzędnych była równa 1.

[C, macierz przejścia]

Przykład 7 – las i pole

W ciągu dekady 10% lasu zostaje wylesione, a 20% pól zarasta lasem: $P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. $(P - I)\mathbf{v} = 0$: $-0,1l + 0,2p = 0 \Rightarrow l = 2p$; $l + p = 1 \Rightarrow l = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{3}$.

Druga wartość własna: $\lambda_2 = \text{tr } P - 1 = 0,7$ – odchylenie od równowagi maleje co dekadę o 30%.
Np. od stanu $[0,3; 0,7]$: $[0,41; 0,59]$, $[0,487; 0,513]$, ..., $\rightarrow [0,667; 0,333]$.

★ Zapamiętaj

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$; dla 2×2 : $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$, $\lambda_1\lambda_2 = \det A$; $\mathbf{v}$ – z jednego równania układu $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

Leslie: λ_1 – tempo wzrostu, $\mathbf{v}_1$ – stabilna struktura wieku. Macierz przejścia: stan równowagi – wektor własny dla $\lambda = 1$.

Literatura

- [MS] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
- [GuS] H. Guściora, M. Sadowski, *Repetitorium z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1977.
- [BG] G. Banaszk, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
- [K] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, cz. 1–3, PWN, Warszawa 2004–2005.
- [C] H. Caswell, *Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation*, 2nd ed., Sinauer Associates, Sunderland 2001.
- [L] P. H. Leslie, On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* 33 (1945), 183–212.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.