

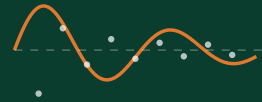
Streszczenie wykładu 13

Równania różniczkowe zwyczajne i ich zastosowania

Równanie różniczkowe, rząd, rozwiązanie ogólne i szczególne • zagadnienie początkowe • równania o zmiennych rozdzielonych • równanie liniowe rzędu pierwszego i metoda uziemiennia stałej • zastosowania

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



1 Podstawowe pojęcia

Definicja (równanie różniczkowe)

Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie wiążące zmienną niezależną x , nieznaną funkcję $y = y(x)$ i jej pochodne: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. **Rzędem** równania nazywamy najwyższy rząd pochodnej występującej w równaniu.

[KW2, Równania różniczkowe]

Definicja (rozwiązanie ogólne i szczególne)

Rozwiązaniem (całką) równania nazywamy każdą funkcję, która je spełnia. **Rozwiązanie ogólne** równania rzędu n zawiera n dowolnych stałych (rodzina krzywych). **Rozwiązanie szczególne** otrzymujemy, wyznaczając stałe z **warunków początkowych**. **Zagadnienie początkowe (Cauchy'ego)**: znaleźć rozwiązanie $y' = f(x, y)$ spełniające $y(x_0) = y_0$.

[KW2, Równania różniczkowe]

Przykład 1 – sprawdzanie rozwiązania

Funkcja $y = \frac{1}{1-Cx}$ spełnia równanie $y^2 = xy' + y$: $y' = \frac{C}{(1-Cx)^2}$, więc
 $xy' + y = \frac{Cx}{(1-Cx)^2} + \frac{1}{1-Cx} = \frac{Cx+1-Cx}{(1-Cx)^2} = \frac{1}{(1-Cx)^2} = y^2$.

2 Równanie o zmiennych rozdzielonych

Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$y' = f(x)g(y) \implies \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Stałą całkowania dopisujemy raz (często w postaci $\ln|C|$). Jeżeli $g(y_0) = 0$, to $y \equiv y_0$ też jest rozwiązaniem.

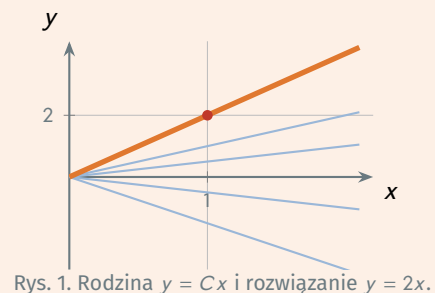
[KW2, Równania różniczkowe]

Przykład 2 – zagadnienie początkowe

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Rozwiązanie. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, więc
całka ogólna: $y = Cx$.

Z warunku $y(1) = 2$: $C = 2$, $y = 2x$.



Rys. 1. Rodzina $y = Cx$ i rozwiązanie $y = 2x$.

Przykład 3

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1: \frac{dy}{y} = -2x dx, \quad \ln|y| = -x^2 + \ln|C|, \quad y = Ce^{-x^2}; \quad C = 1, \quad y = e^{-x^2}.$$

3 Równanie liniowe rzędu pierwszego

Definicja (równanie liniowe rzędu I)

Równanie $y' + p(x)y = q(x)$ (p, q – ciągłe) nazywamy **liniowym rzędu pierwszego**; dla $q \equiv 0$ – **jednorodnym** (RJ), w przeciwnym razie – **niejednorodnym** (RN).

[KW2, Równania różniczkowe]

Metoda uzmienniania stałej

1. RJ (zmienne rozdzielone): $y = C e^{-P(x)}$, $P(x) = \int p(x) dx$.
2. Uzmienniamy stałą: $y = C(x) e^{-P(x)}$ i podstawiamy do RN. Zawsze otrzymujemy $C'(x) e^{-P(x)} = q(x)$.
3. $C(x) = \int q(x) e^{P(x)} dx + C_1$; wstawiamy $C(x)$ do $y = C(x) e^{-P(x)}$.

[KW2, Równania różniczkowe]

Przykład 4

$$y' - \frac{1}{x}y = \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Rozwiązanie. A. RJ: $y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = Cx$. B. $y = C(x)x$, $y' = C'(x)x + C(x)$. Po podstawieniu: $C'(x)x = \sqrt{x}$, $C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $C(x) = 2\sqrt{x} + C_1$.

$$y = (2\sqrt{x} + C_1)x$$

Przykład 5

$$y' - \frac{3}{x}y = x: \quad \text{RJ: } y = Cx^3, \quad C'(x) = x^{-2}, \quad y = C_1x^3 - x^2$$

$$y' - 2y = e^x: \quad \text{RJ: } y = Ce^{2x}, \quad C'(x) = e^{-x}, \quad y = C_1e^{2x} - e^x$$

$$y' - y = x: \quad \text{RJ: } y = Ce^x, \quad C'(x) = xe^{-x} \text{ (przez części)}, \quad y = C_1e^x - x - 1$$

4 Zastosowania

★ Zapamiętaj

wzrost/zanik wykładniczy (Malthus):	$x' = u x$	$x(t) = x_0 e^{ut}$
model logistyczny (pojemność M):	$x' = k x(M - x)$	$x(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kMt}}, A = \frac{M - x_0}{x_0}$
stygnięcie (prawo Newtona):	$T' = -k(T - T_{ot})$	$T(t) = T_{ot} + (T_0 - T_{ot})e^{-kt}$
ładowanie kondensatora:	$Rq' + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$	$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$

Źródła: [KW2, Równania różniczkowe – zastosowania], [HRW3, Obwody prądu stałego].

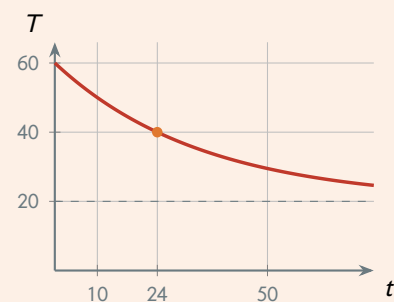
Przykład 6 – ekoenergetyka: stygnięcie wody w zasobniku

Woda ($T_0 = 60^\circ\text{C}$) stygnie w pomieszczeniu o temperaturze 20°C ; po 10 h ma 50°C . Kiedy ostygnie do 40°C ?

Rozwiązanie. $\frac{dT}{T-20} = -k dt \Rightarrow T = 20 + Ce^{-kt}$; $T(0) = 60$: $C = 40$.

$T(10) = 50$: $e^{-10k} = \frac{3}{4}$, $k = \frac{\ln(4/3)}{10} \approx 0,0288 \text{ h}^{-1}$.

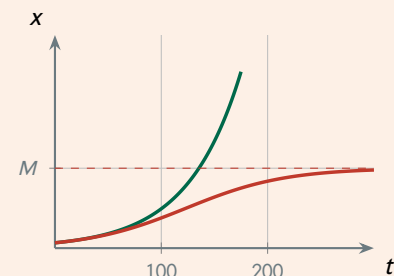
$T = 40$: $e^{-kt} = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\ln 2}{k} \approx \boxed{24,1 \text{ h}}$.



Rys. 2. Temperatura wody dąży do temperatury otoczenia.

Przykład 7 – wzrost wykładniczy a logistyczny

Model Malthusa przewiduje nieograniczony wzrost, model logistyczny – wzrost do poziomu nasycenia M . Krzywą logistyczną opisuje się m.in. rozwój mocy zainstalowanej nowych technologii energetycznych.



Rys. 3. Model Malthusa (zielony) i logistyczny (czerwony).

Literatura

- [F1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 2005.
- [KW1] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa 2001.
- [GS] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
- [KW2] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. II, PWN, Warszawa 2006.
- [HRW3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 3, PWN, Warszawa 2015.

Znacznik [klucz, miejsce] przy definicjach, twierdzeniach i wzorach wskazuje źródło sformułowania.